Estudio sobre nuevas álgebras de división no asociativas

Luis Felipe Duque Álvarez*
Luis Alberto Wills Toro

4 de julio de 2012

Resumen

En este artículo se estudian algunos tipos de álgebras de división no necesariamente asociativas (NNA) conocidas como álgebras twisted, definidas y descritas originalmente en [1] y [2].

Inicialmente se encuentran e identifican las álgebras de Lie de derivaciones de las álgebras estudiadas, con lo cual es posible distinguir algunas álgebras twisted de una manera alternativa a la presentada en el trabajo original. Posteriormente se encuentran nuevas álgebras de división NNA que surgen al intentar generalizar o interpolar la escritura de las álgebras twisted planteada en [1]. Finalmente, se reescriben los productos de álgebras graduadas en el grupo Q_8 estudiadas como parejas de Tesseranios, análogamente a como se escriben los productos en [1].

Palabras clave: Álgebras de división, álgebras graduadas, álgebras grupo twisted, álgebras no necesariamente asociativas

Abstract

In this article we study some types of non-necessarily associative division algebras (NNA) known as twisted algebras, originally defined and described in [1] and [2].

Initially we found and identify the Lie algebra of derivations of each twisted division algebra; with this procedure it is possible to distinguish some of them in a different way from that proposed in [1] and [2]. After this, we found some new NNA division algebras that follow when trying to generalize or interpolate the way in which some twisted algebras are written in [1]. Finally, the product of each Q8-graded algebra is written as pairs of Tesseranios, in a way analogous to the one presented in [1].

Key words: Division algebras, graded algebras, twisted group algebras, non necessarily associative algebras

*Los autores agradecen a la Universidad Nacional de Colombia (QUIPU: 20101009259), al programa jóvenes investigadores de Colciencias y al programa EnlazaMundos de la alcaldía de Medellín por haber apoyado este trabajo

El orden de este artículo es el siguiente: en la Sección 1 se presentan algunas definiciones y ejemplos básicos relacionados con álgebras twisted de división, productos de Cayley-Dickson y álgebras de derivaciones que serán utilizados a lo largo del documento. En la Sección 2 se explica brevemente la forma en que [1] y [2] encuentran las álgebras twisted de división estudiadas y se escriben sus tablas de multiplicación.

En la Sección 3 se encuentran e identifican las álgebras de Lie de Derivaciones de las álgebra twisted estudiadas. En la Sección 4 se encuentran algunas nuevas álgebras de división partiendo de la escritura de álgebras twisted como doblajes de Cayley-Dickson modificados, y finalmente, en la Sección 5 se escriben los productos de las álgebras twisted de división graduadas en Q_8 como doblajes de Cayley-Dickson modificados.

1. Conceptos Básicos

1.1. Álgebras twisted de División NNA

Definición 1. *Sea G un grupo finito con identidad e, sea K un campo y sea A un subgrupo multiplicativo de $K-\{0\}$. Decimos que la función $C : G\times G \to A$ es una* **constante de estructura unitaria en G** *si $C(e,g) = C(g,e) = 1$, $\forall g \in G$.*

Definición 2. *Sea C una constante de estructura unitaria en G y sea $\mathcal{A}$ un espacio vectorial real con base $B = \{v_g\}_{g\in G}$. Definimos el producto de elementos en B como $v_a \cdot v_b = C(a,b)v_{ab}$ $\forall a,b \in G$; al extender este producto bilinealmente sobre $\mathcal{A}$ llegamos a que $\mathcal{A}$ es un álgebra no necesariamente asociativa (NNA). Decimos entonces que $\mathcal{A}$ es un* **álgebra grupo twisted** *real graduada por G, que denotaremos $\mathcal{A} = \mathbb{R}_C\, G$. En tal caso, G será llamado grupo de graduación del álgebra $\mathcal{A}$.*

Notemos que si $\mathbf{x} = \sum x_a v_a$, $\mathbf{y} = \sum y_b v_b$ son elementos de un álgebra $\mathcal{A} = \mathbb{R}_C G$, su producto en $\mathcal{A}$ estará dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= \Big(\sum_{a\in G} x_a\ v_a\Big)\cdot\Big(\sum_{b\in G} y_b\, v_b\Big)\\
&= \sum_{a,b\in G} x_a\, y_b\ C(a,b)v_{ab}\\
&= \sum_{c\in G}\Big(\sum_{a\in G} x_a\ y_{a^{-1}c}\ C(a,a^{-1}c)\Big)v_c\\
&= \sum_{c\in G}\Big(\sum_{b\in G} x_{cb^{-1}}\ y_b\ C(cb^{-1},b)\Big)v_c
\end{aligned}\tag{1}$$

Definición 3. *Un anillo unitario no necesariamente asociativo R con identidad es llamado un* **anillo de división no necesariamente asociativo (NNA)** *si los mapas de multiplicación por la izquierda en R ($x \mapsto v\cdot x$), y multiplicación por derecha en R ($x\mapsto x\cdot v$) son biyecciones $\forall v \in R-\{0\}$. Si un anillo de* *división NNA es también un álgebra NNA sobre el campo K decimos que éste es una K*-**álgebra de división NNA**.

Ejemplo 1.

a) *Cuando C es una constante de estructura tal que $C(a,b) = 1 \in \mathbb{R}\ \forall a, b \in G$, el álgebra twisted $\mathbb{R}_C G$ coincide con el grupo anillo $\mathbb{R}G$.*

b) *El álgebra de los reales ($\mathbb{R}$) y el álgebra de los complejos ($\mathbb{C}$) son álgebras twisted de división asociativas y conmutativas graduadas en los grupos $G = \{e\}$ y $G = \mathbb{Z}_2$ respectivamente.*

c) *En 1843, Hamilton construyó el primer ejemplo de anillo de división asociativo y no conmutativo: el álgebra de cuaterniones ($\mathbb{H}$). $\mathbb{H}$ es un espacio vectorial real con base $\{1, i, j, k\}$, y con un producto $\mathbb{R}$-bilineal que satisface la siguiente tabla de multiplicación:*

$\mathbb{H}$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Tabla*: Tabla de multiplicación de* $\mathbb{H}$

d) *El álgebra de octoniones ($\mathbb{O}$) es un álgebra de división no asociativa y no conmutativa. $\mathbb{O}$ es un espacio vectorial real con base $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ y con un producto $\mathbb{R}$-bilineal que satisface la siguiente tabla de multiplicación:*

$\mathbb{O}$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$

Tabla*: Tabla de multiplicación de* $\mathbb{O}$

Proposición 1. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra NNA finito dimensional sobre $\mathbb{R}$ entonces $\mathcal{A}$ es un anillo de división si y sólo si $\mathcal{A}$ no tiene divisores no triviales de cero.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{A}$ un anillo de división finito dimensional sobre $\mathbb{R}$ y sean $a, b \in \mathcal{A}$ tales que $ab = 0$. Si $a \neq 0$ sabemos que el mapa $L_a : x \mapsto ax$ es una biyección y $L_a(0) = L_a(b) = 0$ luego $b = 0$. Análogamente, si $b \neq 0$, el mapa $R_b : x \mapsto xb$ es

una biyección y $R_b(0) = R_b(a) = 0$ luego $a = 0$; concluimos así que $\mathcal{A}$ no tiene divisores de cero.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra NNA finito dimensional sin divisores no triviales de cero, y sea $v \in \mathcal{A} - \{0\}$; es fácil ver que el mapa de multiplicación $L_v : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ ($L_v : x \mapsto vx$) es un homomorfismo de espacios vectoriales finitodimensionales. Además $KerL_v = \{0\}$ luego $ImL_v = \mathcal{A}$ con lo cual L_v es una biyección. Análogamente se puede probar que el mapa $R_v : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ es una biyección, llegando así a que $\mathcal{A}$ es un anillo de división NNA.

□

Proposición 2. *Si $\mathcal{A}$ es un $\mathbb{R}$-álgebra de división NNA entonces $\mathcal{A}$ tiene dimensión 1,2,4 u 8.*

Demostración. Esta proposición fue probada por Bott & Milnor y Kervaire independientemente. Para algunos comentarios sobre este resultado y su prueba se remite al lector a [4], [5], [3] y [6]. □

Sabemos por la proposición anterior que sólo puede haber álgebras twisted de división graduadas en grupos de órdenes 1,2,4 u 8. Ante la pregunta ¿Cómo debe ser una constante de estructura C para que el álgebra twisted $\mathcal{A} = \mathbb{R}_C G$ sea un álgebra de división? en [1] se plantea el siguiente razonamiento:

De la Proposición 1 tenemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra twisted de división si y solo si $\forall \mathbf{x} := \sum x_a v_a$, $\forall \mathbf{y} := \sum y_b v_b \in (\mathcal{A} - \{0\})$ se tiene que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$, lo que es equivalente a que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{c \in G} \Big(\sum_{a \in G} y_{a^{-1}c} \; C(a, a^{-1}c) \; x_a \Big) v_c \neq 0,$$

por lo cual el sistema homogéneo de ecuaciones en $\{x_a\}_{a \in G}$

$$\sum_{a \in G} M^L_{c,a} \; x_a = 0 \quad \forall c \in G$$

con

$$M^L_{c,a} := y_{a^{-1}c} \; C(a, a^{-1}c) \tag{2}$$

tiene una única solución ($x_a = 0 \;\; \forall a \in G$) cuando $\mathcal{A}$ es un álgebra de división.

Así, en [1] se concluye que $\mathcal{A} = \mathbb{R}_C G$ es un álgebra twisted de división si y solo si $detM^L \neq 0 \;\; \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ donde M^L es la matriz definida en la Ecuación 2.

Análogamente se puede llegar a que $\mathcal{A} = \mathbb{R}_C G$ es un álgebra twisted de división si y solo si $detM^R \neq 0 \;\; \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, donde M^R se define como

$$M^R_{c,b} := x_{cb^{-1}} \, C(cb^{-1}, b) \tag{3}$$

1.2. Proceso de Cayley-Dickson

Definición 4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra NNA con unidad 1, sea j una involución en $\mathcal{A}$ (es decir, un antiautomorfismo tal que $j \circ j(a) = a$, $\forall a \in \mathcal{A}$), que denotaremos $\overline{a} := j(a)$, tal que $\overline{a}a = Q(a)1$, $\forall a \in \mathcal{A}$ donde Q es una forma cuadrática no degenerada y sea c un elemento no nulo en $\mathcal{A}$. Definimos una nueva álgebra $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D} \cong \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ como espacio vectorial y dados $(u,v),(x,y) \in \mathcal{D}$ definimos su producto como:*

$$(u,v) * (x,y) = (ux + c\overline{y}v, yu + v\overline{x}). \tag{4}$$

Es fácil ver que $\mathcal{D}$ es en efecto un álgebra NNA con unidad $(1,0)$, definimos una involución $j'(x,y) := \overline{(x,y)} := (\overline{x}, -y)$ $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$. Claramente $j'^2 = 1$ y además $\overline{(x,y)}(x,y) = (Q(x) - cQ(y))(1,0)$ donde $Q'(x,y) := Q(x) - cQ(y)$ es una forma cuadrática no degenerada. Así pues, el álgebra $\mathcal{D}$ satisface las mismas condiciones que teníamos inicialmente para el álgebra $\mathcal{A}$, y diremos que es un **c-doblaje de Cayley-Dickson de** *$\mathcal{A}$, lo cual denotaremos $\mathcal{A} \xrightarrow{CD} \mathcal{D}$.*

Ejemplo 2.

a) *El álgebra de los complejos $(\mathbb{C})$ es un (-1)-doblaje de Cayley-Dickson de $\mathbb{R}$, pues $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como espacio vectorial, además el producto de elementos $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ puede expresarse como $(a,b)_{\mathbb{C}} * (c,d)_{\mathbb{C}} = (ac - bd, ad + bc)_{\mathbb{C}}$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ y donde xy denota la multiplicación usual de reales $\forall x,y \in \mathbb{R}$. La involución (conjugación) usual en $\mathbb{C}$ puede escribirse como $\overline{(a,b)} = (\overline{a}, -b)$ donde $\overline{x} = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ es una involución en $\mathbb{R}$.*

b) *El álgebra de cuaternios $(\mathbb{H})$ es un (-1)-doblaje de Cayley-Dickson de $\mathbb{C}$, pues $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ como espacio vectorial, y dados $(a,b),(c,d) \in \mathbb{H}$ con $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ podemos reescribir la multiplicación en $\mathbb{H}$ como $(a,b)_{\mathbb{H}} * (c,d)_{\mathbb{H}} = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c})_{\mathbb{H}}$. La conjugación estará dada por $\overline{(a,b)} = (\overline{a}, -b)$, donde $\overline{a}$ es la involución (conjugación) en $\mathbb{C}$ y xy representa la multiplicación usual de complejos $\forall x,y \in \mathbb{C}$.*

c) *El álgebra de los octoniones $(\mathbb{O})$ es un (-1)-doblaje de Cayley-Dickson $\mathbb{H}$, y al hacer un doblaje en $\mathbb{O}$ se obtiene un álgebra (que no es de división) de dimensión 16 conocida como los sedenios, denotados por $\mathbb{S}$.*

d) *Al realizar inductivamente (-1)-doblajes de Cayley-Dickson comenzando en $\mathbb{R}$ se obtiene una cadena infinita de álgebras conocidas como álgebras de Cayley-Dickson, cada una de las cuales tiene el doble de la dimensión de la anterior, es decir, $\mathbb{R} \xrightarrow{CD} \mathbb{C} \xrightarrow{CD} \mathbb{H} \xrightarrow{CD} \mathbb{O} \xrightarrow{CD} \mathbb{S} \xrightarrow{CD} ...$*

Proposición 3. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra NNA con unidad 1, sea j una involución en $\mathcal{A}$ tal que $\overline{a}a := j(a)a = Q(a)1$, $\forall a \in \mathcal{A}$, donde Q es una forma cuadrática no degenerada, y sea $\mathcal{D}$ el doblaje de Cayley-Dickson de $\mathcal{A}$. Entonces:*

1. $\mathcal{D}$ *es conmutativa y asociativa si y sólo si* $\mathcal{A}$ *es conmutativa y asociativa y* $j = 1$.

2. $\mathcal{D}$ *es asociativa si y sólo si* $\mathcal{A}$ *es conmutativa y asociativa*

3. $\mathcal{D}$ *es alternativa si y sólo si* $\mathcal{A}$ *es asociativa*

Demostración. Ver prueba en [7]. □

1.3. Álgebra de Lie de Derivaciones

Definición 5. *Decimos que un álgebra NNA* $\mathcal{A}$ *con producto* $*$ *es un álgebra de Lie si satisface:*

1. *Alternatividad:* $x * x = 0 \ \ \forall x \in \mathcal{A}$

2. *Identidad de Jacobi:* $x * (y * z) + z * (x * y) + y * (z * x) = 0 \ \ \forall x, y, z \in \mathcal{A}$

En tal caso el producto bilineal en $\mathcal{A}$ *es usualmente llamado Corchete de Lie y se denotará como* $[x, y] := x * y \ \ \forall x, y \in \mathcal{A}$

Ejemplo 3.

a) *Si* V *es un espacio vectorial real* n*-dimensional y definimos el producto* $[x, y] = 0 \ \ \forall x, y \in V$*, obtenemos un álgebra de Lie conocida como álgebra de Lie abeliana* n*-dimensional. Es fácil ver que toda álgebra de Lie 1-dimensional es abeliana; denotaremos a esta álgebra por* $u(1)$.

b) *El espacio vectorial real de todas las matrices* n *por* n*, que denotaremos* $gl(n, \mathbb{R})$*, junto al producto de Lie definido como* $[A, B] := AB - BA$ $\forall A, B \in gl(n, \mathbb{R})$ *es un álgebra conocida como el álgebra de Lie general real.*

c) *El espacio vectorial real de todas las matrices* n *por* n *antisimétricas, que denotaremos* $o(n)$*, junto al producto de Lie definido en el ejemplo anterior, es un álgebra conocida como el álgebra de Lie ortogonal.* $o(3)$ *es isomorfa al álgebra de Lie conformada por el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *con el producto cruz.*

d) *El espacio vectorial conformado por las matrices* n *por* n *complejas antihermíticas* $((X^{tr})^* = -X)$ *con traza nula junto al producto de Lie es conocido como el álgebra de Lie especial unitaria de orden n, y será denotada por* $su(n)$*. Puede probarse que* $su(2) \cong o(3)$

Definición 6. *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra NNA, decimos que una transformación lineal* $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *tal que* $D(ab) = D(a)b + aD(b) \ \ \forall a, b \in \mathcal{A}$ *es una derivación de* $\mathcal{A}$*; el conjunto de todas las derivaciones será denotado por Der* $\mathcal{A}$*. Definimos el producto* $[D_1, D_2] := D_1 D_2 - D_2 D_1 \ \ \forall D_1, D_2 \in Der\mathcal{A}$ *donde* $D_i D_j$ *denota la composición de las trasnformaciones lineales* D_i *y* D_j*. Así, Der* $\mathcal{A}$ *junto al producto definido anteriormente es un álgebra de Lie conocida como el álgebra de Lie de las derivaciones de* $\mathcal{A}$.

En términos de teoría algebraica de grupos puede probarse que $Der\ \mathcal{A}$ es el álgebra de Lie del grupo de automorfismos de $\mathcal{A}$.

Ejemplo 4.

a) *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una derivación en* $\mathbb{R}$ *entonces* $f(x) = kx \quad \forall x \in \mathbb{R}$ *con* $k \in \mathbb{R}$ *y además* $f(ab) = f(a)b + af(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, *luego* $kab = kab + akb$ *llegando a que* $k = 0$, *por lo cual toda derivación en* $\mathbb{R}$ *es trivial. Es fácil hacer un razonamiento análogo en* $\mathbb{C}$. *Llegamos así a que el álgebra de derivaciones de* $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{C}$ *es un álgebra de Lie 0-dimensional.*

b) *Para encontrar* $Der\ \mathbb{H}$ *consideramos una transformación lineal* $D : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *asociada a la matriz* $D = (d_{ij})_{ij}$ *de dimensiones* 4×4. *Es fácil ver que* D *es una derivación si y solo si* $D(v_i * v_j) = D(v_i) * v_j + v_i * D(v_j)$ *para cualquier pareja* v_i, v_j *de elementos en la base de* $\mathbb{H}$.

Al computar $D(v_i * v_j) = D(v_i) * v_j + v_i * D(v_j) \quad \forall v_i, v_j \in \{1, i, j, k\}$ *obtenemos un sistema homogéneo de ecuaciones de la forma* $\boldsymbol{Ad} = \boldsymbol{0}$; *donde* $\boldsymbol{d} = (d_{11}, d_{12}, \ \ldots \ , d_{43}, d_{44})^t$ *y* $\boldsymbol{A}$ *es una matrix de dimensiones* 28×16 *con rango 13, luego la dimensión de su kernel es 3; con lo cual tenemos que* $dim(Der\ \mathbb{H}) = dim(Ker(\boldsymbol{A})) = 3$.

Al encontrar una base para $Ker(\boldsymbol{A})$ *y reemplazar en* $D = (d_{ij})_{ij}$ *llegamos a que* $Der\ \mathbb{H} \cong o(3)$ *pues* $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}$ *son generadores de* $Der\ \mathbb{H}$ *con*

$$\mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $Der\ \mathbb{O}$ es un álgebra de Lie 14-dimensional. En [8] se prueba que $Der\ \mathbb{O} \cong G_2$, un álgebra de Lie semisimple excepcional ampliamente estudiada.

2. Álgebras twisted de división finitas

A continuación se presentan las álgebras twisted de división encontradas en [1] y [2]. Gracias a la Proposición 2 esta búsqueda se restringe a álgebras twisted graduadas en grupos de orden 1, 2, 4 y 8. En este documento se presentan con cierto detalle los casos iniciales; para una explicación más detallada se remite al lector a los resultados originales en [1] [2].

2.1. $\mathbf{G} = \{e\}$

Desde la Definición 1 se observa que hay una única selección de la constante de estructura $C_{\{e\}}$ cuando $G = \{e\}$. El álgebra twisted construida a partir de esta constante de estructura coincide con el álgebra de los reales ($\mathbb{R}$).

2.2. $\mathrm{G} = \mathbb{Z}_2$

Consideremos un álgebra twisted $\mathcal{A} = \mathbb{R}_C\mathbb{Z}_2$. Es decir, supongamos que tenemos un álgebra twisted graduada en $\mathbb{Z}_2$ con constante de estructura C. Tenemos así que $\mathcal{A}$ es un álgebra NNA con base $B = \{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}_2}$, y cuya constante de estructura unitaria tendrá la forma

C	0	1
0	1	1
1	1	α

Tabla: Posible constante de estructura unitaria al considerar $\mathrm{G} = \mathbb{Z}_2$

De la Definición 2 tenemos que los productos de elementos en B serán:
$v_0 \cdot v_0 = C(0,0)v_0 = 1v_0 = v_0,$
$v_0 \cdot v_1 = C(0,1)v_1 = 1v_1 = v_1,$
$v_1 \cdot v_0 = C(1,0)v_1 = 1v_1 = v_1,$
$v_1 \cdot v_1 = C(1,1)v_0 = \alpha\, v_0.$

Resta entonces encontrar el valor $C(1,1) = \alpha \in \{1,-1\}$ para que $\mathcal{A}$ sea un álgebra de división, para lo cual necesitamos que $detM^R = x_0^2 - \alpha x_1^2 \neq 0$ siempre que $(x_0, x_1) \neq (0,0)$, luego $\mathcal{A}$ es un álgebra de división únicamente cuando $\alpha = -1$. Tendríamos así que la tabla de multiplicación de la única álgebra twisted de división graduada en $\mathbb{Z}_2$ será

$\mathcal{A}_{\mathbb{Z}_2}$	v_0	v_1
v_0	v_0	v_1
v_1	v_1	$-v_0$

Tabla: Tabla de multiplicación del álgebra twisted de división graduada en $\mathbb{Z}_2$

El razonamiento con la matriz M^L es análogo, pues $detM^L = y_0^2 - \alpha y_1^2$, por lo cual, con la constante de estructura anterior tendríamos que $detM^R = x_0^2 + x_1^2$ y $detM^L = y_0^2 + y_1^2$. Luego $v_1 \cdot v_1 = C(1,1)v_0 = -1v_0 = -v_0$. Es claro entonces que hay una única selección de la constante de estructura C tal que $\mathbb{R}_C\mathbb{Z}_2$ es un álgebra de división. Directamente se observa que $\mathcal{A}$ es asociativa, conmutativa y coincide con el álgebra de los complejos ($\mathbb{C}$).

2.3. $\mathrm{G} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

Veamos ahora cómo debe ser la constante de estructura para que un álgebra twisted graduada en el grupo de Klein no tenga divisores de cero.

Consideremos un álgebra twisted $\mathcal{A} = \mathbb{R}_C(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ con base $\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2}$. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ tiene tres subgrupos de orden dos que dan origen a tres subálgebras twisted de $\mathcal{A}$ con bases $\{v_{(0,0)}, v_{(0,1)}\}$, $\{v_{(0,0)}, v_{(1,0)}\}$, y $\{v_{(0,0)}, v_{(1,1)}\}$, las cuales no tienen divisores de cero (de tenerlos, $\mathcal{A}$ no sería un álgebra de división), luego estas subálgebras son isomorfas a $\mathbb{R}_{C_{\mathbb{Z}_2}}\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{C}$. Necesitamos entonces que $C((0,1),(0,1)) = C((1,0),(1,0)) = C((1,1),(1,1)) = -1$, pues como se vio en la sección anterior hay una única selección de la constante de estructura en una álgebra twisted de división de orden 2, si definimos $v_{(1,1)} := v_{(0,1)} \cdot v_{(1,0)}$ tendríamos que $C((0,1),(1,0)) = 1$. Así, la constante de estructura de $\mathcal{A}$ para la base indicada anteriormente tendrá la forma

C	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	1	1	1	1
$(0,1)$	1	-1	1	α
$(1,0)$	1	β	-1	δ
$(1,1)$	1	ϵ	ϕ	-1

Tabla: Posibles constantes de estructura cuando $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

Donde $\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \phi \in \{-1, 1\}$. Razonando igual a como lo hicimos en el caso $G = \mathbb{Z}_2$, para que $\mathcal{A}$ sea un álgebra de división necesitamos que $detM^L \neq 0$.

Al evaluar $detM^L$ en diferentes valores de $(y_0, y_1, y_2, y_3) \neq \mathbf{0}$ se obtiene que $detM^L \neq 0$ únicamente cuando $\alpha = \beta = \phi = -1$ y $\epsilon = \delta = 1$, en cuyo caso se llega a que $detM^L = (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2$ y $detM^R = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$, ambos polinomios definidos positivos. Con esta selección de la constante de estructura se obtiene un álgebra isomorfa a $\mathbb{H}$, que es la única álgebra twisted de división obtenida al graduar con $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. La tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$ se encuentra en el Ejemplo 1.

2.4. $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_4$

Utilizando un procedimiento análogo al anterior, en [1] se encuentra que hay una única álgebra twisted de división de la forma $\mathbb{R}_C\mathbb{Z}_4$ hasta isomorfismo. Esta álgebra será llamada álgebra de teseranios, que denotaremos $\mathbb{T}$. Si denotamos su base $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}_4}$, su tabla de multiplicación será

$\mathbb{T}$	v_0	v_1	v_2	v_3
v_0	v_0	v_1	v_2	v_3
v_1	v_1	v_2	v_3	$-v_0$
v_2	v_2	$-v_3$	$-v_0$	v_1
v_3	v_3	v_0	$-v_1$	v_2

Tabla: Tabla de multiplicación del álgebra twisted de división graduada en $\mathbb{Z}_4$

Al computar $detM^L$ y $detM^R$ obtenemos

$$detM^L = (y_0^2 + y_2^2)^2 + (y_1^2 + y_3^2)^2$$
$$detM^R = (x_0^2 + x_2^2)^2 + (x_1^2 + x_3^2)^2.$$

Es claro entonces que $\mathbb{T}$ es, en efecto, un álgebra de división

2.5. $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

En [2] se observa que cada subgrupo propio de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ está asociado a una subálgebra twisted de división de $\mathcal{A}$ de dimensión menor o igual a 4, y razonando para que $detM^L$ sea definido positivo tal y como se hizo en las secciones anteriores, se llega a que hay una única álgebra twisted de división de la forma $\mathcal{A} = \mathbb{R}_C(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ hasta isomorfismo que coincide con el álgebra de octoniones ($\mathbb{O}$) cuya tabla de multiplicación se encuentra en el Ejemplo 1. De esta tabla de multiplicación se obtienen

$$\begin{aligned} \det M^L &= (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2)^4, \\ \det M^R &= (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2)^4. \end{aligned}$$

2.6. $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$

En [1] se encuentra que hay a lo sumo 4 álgebras twisted de división no isomorfas de la forma $\mathcal{A} = \mathbb{R}_C(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$, denotadas por B_{1M}, B_{2M}, B_{3M} y B_{4M}, al escribir su base como $\{v_g\}_{g \in \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4}$ sus tablas de multiplicación serán:

B_{1M}	$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$
$v_{(0,0)}$	$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$
$v_{(0,1)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$-v_{(0,3)}$	$v_{(0,0)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$	$-v_{(1,0)}$
$v_{(0,2)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$-v_{(0,1)}$	$v_{(1,2)}$	$-v_{(1,3)}$	$-v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$
$v_{(0,3)}$	$v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$	$-v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$
$v_{(1,0)}$	$v_{(1,0)}$	$-v_{(1,1)}$	$-v_{(1,2)}$	$-v_{(1,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$
$v_{(1,1)}$	$v_{(1,1)}$	$-v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$	$-v_{(1,0)}$	$-v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$
$v_{(1,2)}$	$v_{(1,2)}$	$-v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$-v_{(0,2)}$	$-v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$
$v_{(1,3)}$	$v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$	$-v_{(1,1)}$	$-v_{(1,2)}$	$-v_{(0,3)}$	$v_{(0,0)}$	$-v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$

Tabla: Tabla de multiplicación del álgebra B_{1M}

B_{2M}	$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$
$v_{(0,0)}$	$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$
$v_{(0,1)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$-v_{(0,3)}$	$v_{(0,0)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$	$-v_{(1,0)}$
$v_{(0,2)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$-v_{(0,1)}$	$v_{(1,2)}$	$-v_{(1,3)}$	$-v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$
$v_{(0,3)}$	$v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$	$-v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$
$v_{(1,0)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$-v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$-v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$-v_{(0,3)}$
$v_{(1,1)}$	$v_{(1,1)}$	$-v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$	$-v_{(1,0)}$	$-v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$
$v_{(1,2)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$	$-v_{(1,1)}$	$-v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$-v_{(0,1)}$
$v_{(1,3)}$	$v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$	$-v_{(1,1)}$	$-v_{(1,2)}$	$-v_{(0,3)}$	$v_{(0,0)}$	$-v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$

Tabla: Tabla de multiplicación del álgebra B_{2M}

B_{3M}	$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$
$v_{(0,0)}$	$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$
$v_{(0,1)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$-v_{(0,3)}$	$v_{(0,0)}$	$v_{(1,1)}$	$-v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$
$v_{(0,2)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$-v_{(0,1)}$	$v_{(1,2)}$	$-v_{(1,3)}$	$-v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$
$v_{(0,3)}$	$v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(1,3)}$	$-v_{(1,0)}$	$-v_{(1,1)}$	$-v_{(1,2)}$
$v_{(1,0)}$	$v_{(1,0)}$	$-v_{(1,1)}$	$-v_{(1,2)}$	$-v_{(1,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$
$v_{(1,1)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$	$-v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$
$v_{(1,2)}$	$v_{(1,2)}$	$-v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$-v_{(0,2)}$	$-v_{(0,3)}$	$-v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$
$v_{(1,3)}$	$v_{(1,3)}$	$-v_{(1,0)}$	$-v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$-v_{(0,3)}$	$v_{(0,0)}$	$-v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$

Tabla: Tabla de multiplicación del álgebra B_{3M}

B_{4M}	$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$
$v_{(0,0)}$	$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$
$v_{(0,1)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	-$v_{(0,3)}$	$v_{(0,0)}$	$v_{(1,1)}$	-$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$
$v_{(0,2)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	-$v_{(0,0)}$	-$v_{(0,1)}$	$v_{(1,2)}$	-$v_{(1,3)}$	-$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$
$v_{(0,3)}$	$v_{(0,3)}$	-$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(1,3)}$	-$v_{(1,0)}$	-$v_{(1,1)}$	-$v_{(1,2)}$
$v_{(1,0)}$	$v_{(1,0)}$	-$v_{(1,1)}$	-$v_{(1,2)}$	-$v_{(1,3)}$	-$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$	$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$
$v_{(1,1)}$	$v_{(1,1)}$	-$v_{(1,2)}$	$v_{(1,3)}$	-$v_{(1,0)}$	-$v_{(0,1)}$	-$v_{(0,2)}$	$v_{(0,3)}$	$v_{(0,0)}$
$v_{(1,2)}$	$v_{(1,2)}$	-$v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$	$v_{(1,1)}$	-$v_{(0,2)}$	-$v_{(0,3)}$	-$v_{(0,0)}$	$v_{(0,1)}$
$v_{(1,3)}$	$v_{(1,3)}$	$v_{(1,0)}$	-$v_{(1,1)}$	-$v_{(1,2)}$	-$v_{(0,3)}$	-$v_{(0,0)}$	-$v_{(0,1)}$	-$v_{(0,2)}$

Tabla: Tabla de multiplicación del álgebra B_{4M}

Con las que se obtiene

$$\det M^R_{B_{iM}} = \left((x_0^2+x_2^2+x_4^2+x_6^2)^2+(x_1^2+x_3^2+x_5^2+x_7^2)^2\right)^2.$$

2.7. G $= D_4$

En [2] se encuentra que no existen álgebras twisted de división graduadas en el grupo dihedral de cuatro elementos (D_4).

2.8. G $= Q_8$

Al considerar el grupo de los cuaterniones (Q_8) en [2] se encuentra que hay 32 álgebras twisted de división de la forma $\mathbb{R}_C Q_8$ que denotaremos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_{32}$; de estas hay a lo sumo 6 clases de álgebras no isomorfas que denotaremos b, d, p, q, x, w. Al denotar la base de estas álgebras como $\{v_g\}_{g\in Q_8}$ sus tablas de multiplicación son de la forma

$\mathcal{A}_i$	v_1	v_i	v_{-1}	v_{-i}	v_k	v_j	v_{-k}	v_{-j}
v_1	v_1	v_i	v_{-1}	v_{-i}	v_k	v_j	v_{-k}	v_{-j}
v_i	v_i	v_{-1}	v_{-i}	-v_1	-ωv_{-j}	δv_k	ωv_j	δv_{-k}
v_{-1}	v_{-1}	-v_{-i}	-v_1	v_i	-v_{-k}	v_{-j}	v_k	-v_j
v_{-i}	v_{-i}	v_1	-v_i	v_{-1}	ωv_j	-δv_{-k}	ωv_{-j}	δv_k
v_k	v_k	v_j	v_{-k}	v_{-j}	ψv_{-1}	θv_{-i}	-ψv_1	-θv_i
v_j	v_j	βv_{-k}	-v_{-j}	βv_k	ρv_i	λv_{-1}	-ρv_{-i}	λv_1
v_{-k}	v_{-k}	v_{-j}	-v_k	-v_j	ψv_1	θv_i	ψv_{-1}	θv_{-i}
v_{-j}	v_{-j}	-βv_k	v_j	βv_{-k}	ρv_{-i}	-λv_1	ρv_i	λv_{-1}

Tabla: Tabla de multiplicación de las álgebras $\mathcal{A}_i$

Donde $\psi, \lambda, \beta, \omega, \rho, \delta, \theta \in \{1, -1\}$. En la siguiente tabla se muestran los valores $\psi, \lambda, \beta, \omega, \rho, \delta, \theta$ que originan las álgebras de división NNA $\mathcal{A}_i$ y la clase a la cual pertenecen:

	ψ	λ	β	ω	ρ	δ	θ	Clase
$\mathcal{A}_1$	1	1	1	1	1	1	1	x
$\mathcal{A}_2$	1	1	1	1	1	1	–1	b
$\mathcal{A}_3$	1	1	1	1	1	–1	1	d
$\mathcal{A}_4$	1	1	1	1	–1	1	1	d
$\mathcal{A}_5$	1	1	1	1	–1	–1	1	b
$\mathcal{A}_6$	1	1	1	–1	1	1	1	b
$\mathcal{A}_7$	1	1	1	–1	1	1	–1	d
$\mathcal{A}_8$	1	1	–1	1	1	1	1	b
$\mathcal{A}_9$	1	1	–1	1	1	1	–1	d
$\mathcal{A}_{10}$	1	1	–1	–1	1	1	1	d
$\mathcal{A}_{11}$	1	1	–1	–1	1	1	–1	x
$\mathcal{A}_{12}$	1	1	–1	–1	1	–1	–1	b
$\mathcal{A}_{13}$	1	1	–1	–1	–1	1	–1	b
$\mathcal{A}_{14}$	1	1	–1	–1	–1	–1	–1	d
$\mathcal{A}_{15}$	1	–1	1	1	1	–1	1	p
$\mathcal{A}_{16}$	1	–1	–1	1	1	1	1	q
$\mathcal{A}_{17}$	1	–1	–1	1	1	–1	1	w
$\mathcal{A}_{18}$	1	–1	–1	–1	1	1	1	p
$\mathcal{A}_{19}$	1	–1	–1	–1	–1	1	1	w
$\mathcal{A}_{20}$	1	–1	–1	–1	–1	1	–1	q
$\mathcal{A}_{21}$	–1	1	1	1	1	1	–1	q
$\mathcal{A}_{22}$	–1	1	1	1	–1	1	1	p
$\mathcal{A}_{23}$	–1	1	1	1	–1	1	–1	w
$\mathcal{A}_{24}$	–1	1	1	1	–1	–1	1	q
$\mathcal{A}_{25}$	–1	1	1	–1	–1	–1	1	w
$\mathcal{A}_{26}$	–1	1	–1	1	1	1	–1	p
$\mathcal{A}_{27}$	–1	–1	1	1	1	–1	1	q
$\mathcal{A}_{28}$	–1	–1	1	1	–1	–1	1	p
$\mathcal{A}_{29}$	–1	–1	1	–1	–1	–1	1	w
$\mathcal{A}_{30}$	–1	–1	–1	1	1	1	1	p
$\mathcal{A}_{31}$	–1	–1	–1	1	1	1	–1	q
$\mathcal{A}_{32}$	–1	–1	–1	1	1	–1	1	w

Tabla: Valores de $\psi, \lambda, \beta, \omega, \rho, \delta, \theta$ que originan las álgebras $\mathcal{A}_i$.

3. Derivaciones de álgebras Twisted

En esta Sección se presentan las álgebras de Lie de Derivaciones de las álgebras twisted presentadas en la Sección 2. Algunas de estas ya habían sido expuestas en la Sección 1.3, las restantes fueron encontradas realizando un procedimiento similar al Ejemplo 4.**c)** usando *Maple*, veamos:

a) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ no tienen derivaciones no triviales, luego $Der\ \mathbb{R} \cong Der\ \mathbb{C} \cong u(0)$, el álgebra de Lie 0-dimensional.

b) $Der\ \mathbb{H} \cong o(3)$, como se vio en el Ejemplo 4, $o(3)$ es el álgebra de Lie ortogonal de tres dimensiones, y es isomorfa al álgebra que surge al considerar el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ junto al producto cruz.

c) $Der\ \mathbb{T} \cong u(1)$ es el álgebra de Lie abeliana 1-dimensional.

d) $Der\ \mathbb{O}$ es un álgebra de Lie 14-dimensional. En [8] se prueba que $Der\ \mathbb{O} \cong G_2$, un álgebra de Lie semisimple excepcional ampliamente estudiada.

e) $Der\ B_i \cong u(1) \oplus o(3),\ \ \forall i \in \{1,2,3,4\}$

f) $Der\ A_i \cong u(1) \oplus u(1),\ \ \forall i \in \{1,3,8,27,30,32\}$, donde $\cong u(1) \oplus u(1)$ es el álgebra de Lie abeliana de dos dimensiones.

Así, aunque $dim(\mathbb{H}) = dim(\mathbb{T}) = 4$, se tiene que $Der\ \mathbb{H} \ncong Der\ \mathbb{T}$, con lo cual obtenemos que $\mathbb{H} \ncong \mathbb{T}$. Análogamente, $\mathbb{O} \ncong B_i,\ \ \mathbb{O} \ncong A_i$ y $B_i \ncong A_i$. Razonando de esta manera, no se encontraron álgebras graduadas en el mismo grupo que sean no isomorfas.

Estas distinciones ya se habían hecho en los artículos [1] y [2] en donde se concluye que dos álgebras no son isomorfas bien sea encontrando identidades que sólo una de las dos satisface, u observando que una de las dos no es la imagen automorfa de la otra al considerar todos sus posibles automorfismos.

4. Interpolaciones entre Álgebras

Es fácil ver que si $\mathcal{A} = \mathbb{R}_C G$ es un álgebra de división con base $\{v_g \mid g \in G\}$ y H es un subgrupo de G entonces el conjunto $\{v_h \mid h \in H\}$ es base de una subálgebra de división $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ graduada en H.

Si además $[G : H] = 2$ (en particular $H \triangleleft G$) tenemos que $G = H \bigcup Hk$ y $H \bigcap Hk = \phi \quad \forall k \in (G - H)$ entonces $\{v_h \mid h \in H\} \bigcup \{v_h v_k \mid h \in H\}$ es una base de $\mathcal{A}$ (recordemos que $v_h v_k = C(h,k) v_{hk}$ donde C es la constante de estructura del álgebra $\mathcal{A}$)

Así, todo elemento $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ puede escribirse como $\mathbf{x} = (x, x')_R := x + x' v_k$ donde $x, x' \in \mathcal{A}'$. Si tenemos además que $\mathbf{y} = (y, y')_R \in \mathcal{A}$, podemos escribir el producto $\mathbf{xy} \in \mathcal{A}'$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{xy} &= (x,x')_R (y,y')_R && (5) \\ &= (x + x'v_k)(y + y'v_k) && (6) \\ &= xy + (x'v_k)(y'v_k) + x(y'v_k) + (x'v_k)y && (7) \end{aligned}$$

donde $xy,\ (x'v_k)(y'v_k) \in \mathcal{A}'$ y $x(y'v_k),\ (x'v_k)y \in \mathcal{A}'v_k$.

Al definir $f_0, f_1, f_2, f_3 : \mathcal{A}' \times \mathcal{A}' \to \mathcal{A}'$ de tal manera que

$$\begin{array}{rcl} f_0(x,y) & = & xy \\ f_1(x',y') & = & (x'v_k)(y'v_k) \\ f_2(x,y')v_k & = & x(y'v_k) \\ f_3(x',y)v_k & = & (x'v_k)y, \end{array}$$

y reemplazar en la Ecuación 7 obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{xy} & = & (x,x')_R(y,y')_R \qquad (8) \\ & = & (f_0(x,y)+f_1(x',y'), f_2(x,y')+f_3(x',y))_R \qquad (9) \end{array}$$

En las Ecuaciones 8 y 9 vemos que el producto de un álgebra $\mathcal{A}$ graduada en G puede expresarse en términos de parejas en la subálgebra $\mathcal{A}'$ al escoger apropiadamente las funciones f_0, f_1, f_2, f_3. Denotaremos este hecho con la expresión

$$f_{\mathcal{A}' \xrightarrow{R} \mathcal{A}} = \begin{bmatrix} f_0(x,y) \\ f_1(x',y') \\ f_2(x,y') \\ f_3(x',y) \end{bmatrix}$$

Es posible realizar un procedimiento análogo al anterior, pero escribiendo los elementos $x \in \mathcal{A}$ como $\mathbf{x} = (x,x')_L := x + v_k x'$ donde $x, x' \in \mathcal{A}'$ y haciendo un desarrollo como el presentado anteriormente. Este último procedimiento no será usado en este trabajo.

4.1. Interpolación basada en $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}$ y $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}_R$

En el Ejemplo 2 vimos que $\mathbb{H}$ es un (-1)-doblaje de Cayley-Dickson de $\mathbb{C}$. Luego, a partir de la Ecuación 4, tenemos que

$$\mathbf{f}_{\mathbb{C} \xrightarrow{R} \mathbb{H}} = \begin{bmatrix} xy \\ -x'\overline{y'} \\ xy' \\ x'\overline{y} \end{bmatrix}$$

Además, en [1] se encontró que

$$\mathbf{f}_{\mathbb{C} \xrightarrow{R} \mathbb{T}_R} = \begin{bmatrix} xy \\ ix'\overline{y'} \\ xy' \\ x'\overline{y} \end{bmatrix}$$

Al observar las dos expresiones anteriores y considerar el álgebra $\mathcal{D}$ obtenida a partir de

$$\mathbf{f}_{\mathbb{C}\xrightarrow{R}\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} xy \\ kx'\overline{y'} \\ xy' \\ x'\overline{y} \end{bmatrix}$$

donde $k := (r_0, r_1) \in \mathbb{C}$, encontramos que

$$detM^R = (r_0(x_2^2 + x_3^2) - (x_0^2 + x_1^2))^2 + r_1^2(x_2^2 + x_3^2)^2;$$

un polinomio definido positivo excepto cuando $r_0 \geq 0$ y $r_1 = 0$.

Así, $\mathcal{D}$ es un álgebra de división siempre que $k \notin (\mathbb{R}^+ \times \{0\}) \bigcup (0,0)$. Es importante notar que al reemplazar $k = (-1, 0)$ en la expresión $\mathbf{f}_{\mathbb{C}\xrightarrow{R}\mathcal{D}}$ se obtiene el doblaje $\mathbf{f}_{\mathbb{C}\xrightarrow{R}\mathbb{H}}$, y cuando se toma $k = (0, 1)$ se obtiene la expresión $\mathbf{f}_{\mathbb{C}\xrightarrow{R}\mathbb{T}_R}$.

4.2. Interpolaciones basadas en $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{O}$ y $\mathbb{H} \longrightarrow B_{1M}$

En el Ejemplo 2 observamos que $\mathbb{O}$ es un doblaje de Cayley-Dickson de $\mathbb{H}$, con lo cual obtenemos que

$$\mathbf{f}_{\mathbb{H}\xrightarrow{R}\mathbb{O}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\overline{x'}y' \\ x'y \\ x'\overline{y} \end{bmatrix}$$

si además observamos la expresión

$$\mathbf{f}_{\mathbb{H}\xrightarrow{R}B1M} = \begin{bmatrix} xy \\ (\overline{x'}y')i \\ y'((ix)(-i)) \\ x'((i\overline{y})(-i)) \end{bmatrix}$$

obtenida en [1], suponemos un álgebra 8-dimensional $\mathcal{D}$ construida a partir de la expresión

$$f_{\mathbb{H}\xrightarrow{R}\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} xy \\ \left(\overline{y'}x'\right)k \\ y'\left((kx)\left(\overline{k}\right)\right) \\ x'\left((k\overline{y})\left(\overline{k}\right)\right) \end{bmatrix}$$

donde $k := (r_0, r_1, 0, 0) \in \mathbb{H}$ y computamos

$$detM^R = \left(r_0^2 + r_1^2\right)^4 \left((r_0(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2) - (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2))^2 + r_1^2(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2)\right)^2,$$

encontramos que el álgebra $\mathcal{D}$ es de división si $(r_0, r_1) \notin (\mathbb{R}^+ \times \{0\}) \bigcup (0, 0)$

4.3. Interpolación basada en $\mathbb{H} \longrightarrow B_{1M}$ y $\mathbb{H} \longrightarrow B_{4M}$

De forma similar a los casos anteriores, al observar las expresiones

$$\mathbf{f}_{\mathbb{H}\xrightarrow{R}B1M} = \begin{bmatrix} xy \\ (\overline{y'}x')i \\ y'((ix)(-i)) \\ x'((i\overline{y})(-i)) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_{\mathbb{H}\xrightarrow{R}B4M} = \begin{bmatrix} xy \\ (i((\overline{y'}i)x'))(-i) \\ y'((ix)(-i)) \\ x'((i\overline{y})(-i)) \end{bmatrix}$$

consideramos el álgebra $\mathcal{D}$ generada a partir de

$$f_{\mathbb{H}\xrightarrow{R}\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} xy \\ \left(k\left(\left(\overline{y'}\left(\overline{k}\right)\right)x'\right)\right)i \\ y'\left((ix)\left(-i\right)\right) \\ x'\left((i\overline{y})\left(-i\right)\right) \end{bmatrix}$$

donde $k := (r_0, r_1, 0, 0) \in \mathbb{H}$, obtenemos que

$$detM^R = P(\mathbf{x})\left(P(\mathbf{x}) + 4(x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_7^2)(x_0^2 + x_2^2 + x_4^2 + x_6^2)r_0r_1\right)$$

para el álgebra $\mathcal{D}$ y donde

$$P(\mathbf{x}) = \left(x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_7^2\right)^2\left(r_0^2 + r_1^2\right)^2 + \left(x_0^2 + x_2^2 + x_4^2 + x_6^2\right)^2$$

Puede probarse que $\mathcal{D}$ es un álgebra de división si y solo si $r_0 \neq -r_1$.

5. Escritura de álgebras graduadas en Q_8 como pares de Tesseranios

En [1] se dan las expresiones de los productos de los representantes de clase (ver Sección 2.8) de las álgebras de división de la forma $\mathbb{R}_C Q_8$ en términos de parejas de tesseranios. A continuación se escriben los productos de todas las álgebras $\mathcal{A}_i$ con la notación definida en la Sección 4:

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_1} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}y'((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1-\mathrm{w}^2))) \\ -yx' \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_2} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))(\mathrm{w}^2(\overline{y'}\mathrm{w}^2))} \\ -yx' \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_3} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}y'((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1-\mathrm{w}^2))) \\ -yx' \\ \frac{1}{2}((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1+\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_4} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}\overline{((1-\mathrm{w}^2)(x'(1-\mathrm{w}^2)))(\overline{y'})} \\ -yx' \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_5} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}\overline{((1-\mathrm{w}^2)(x'(1-\mathrm{w}^2)))(\overline{y'})} \\ -yx' \\ \frac{1}{2}((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1+\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_6} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}y'((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1-\mathrm{w}^2))) \\ -yx' \\ \frac{1}{2}((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1-\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_7} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))(\mathrm{w}^2(\overline{y'}\mathrm{w}^2))} \\ -yx' \\ \frac{1}{2}((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1-\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_8} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}y'((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1-\mathrm{w}^2))) \\ \overline{\overline{x'}\,\overline{y}} \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_9} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))(\mathrm{w}^2(\overline{y'}\mathrm{w}^2))} \\ \overline{\overline{x'}\,\overline{y}} \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{10}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}y'((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1-\mathrm{w}^2))) \\ -\overline{\overline{x'}\,\overline{y}} \\ \frac{1}{2}((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1-\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{11}} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))(\mathrm{w}^2(\overline{y'}\mathrm{w}^2))} \\ -\overline{\overline{x'}\,\overline{y}} \\ \frac{1}{2}((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1-\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{12}} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))(\mathrm{w}^2(\overline{y'}\mathrm{w}^2))} \\ \overline{\overline{x'}\overline{y}} \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1+\mathrm{w}^2)(x(1-\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{17}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))\overline{y'}} \\ \overline{\overline{x'}\overline{y}} \\ \frac{1}{2}((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1+\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{13}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}(\mathrm{w}^2(y'\mathrm{w}^2))((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1+\mathrm{w}^2))) \\ -\overline{\overline{x'}\overline{y}} \\ \frac{1}{2}((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1-\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{18}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))\overline{y'}} \\ -\overline{\overline{x'}\overline{y}} \\ \frac{1}{2}((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1-\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{14}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}(\mathrm{w}^2(y'\mathrm{w}^2))((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1+\mathrm{w}^2))) \\ \overline{\overline{x'}\overline{y}} \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1+\mathrm{w}^2)(x(1-\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{19}} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}y'((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1+\mathrm{w}^2))) \\ -\overline{\overline{x'}\overline{y}} \\ \frac{1}{2}((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1-\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{15}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))\overline{y'}} \\ -yx' \\ \frac{1}{2}((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1+\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{20}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}\overline{((1-\mathrm{w}^2)(x'(1-\mathrm{w}^2)))(\mathrm{w}^2(\overline{y'}\mathrm{w}^2))} \\ -\overline{\overline{x'}\overline{y}} \\ \frac{1}{2}((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1-\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{16}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))\overline{y'}} \\ \overline{\overline{x'}\overline{y}} \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{21}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}y'((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1+\mathrm{w}^2))) \\ -yx' \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{22}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}((\mathrm{w}^2)(y'(\mathrm{w}^2)))((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1-\mathrm{w}^2))) \\ -yx' \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{23}} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))\overline{y'}} \\ -yx' \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{24}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}((\mathrm{w}^2)(y'(\mathrm{w}^2)))((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1-\mathrm{w}^2))) \\ -yx' \\ \frac{1}{2}((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1+\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{25}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}((\mathrm{w}^2)(y'(\mathrm{w}^2)))((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1-\mathrm{w}^2))) \\ -yx' \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1+\mathrm{w}^2)(x(1-\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{26}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}y'((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1+\mathrm{w}^2))) \\ \overline{\overline{x'}\,\overline{y}} \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{27}} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}(\mathrm{w}^2(y'\mathrm{w}^2))((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1+\mathrm{w}^2))) \\ -yx' \\ \frac{1}{2}((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1+\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{28}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))((\mathrm{w}^2)(\overline{y'}(\mathrm{w}^2)))} \\ -yx' \\ \frac{1}{2}((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1+\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{29}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}\overline{((1+\mathrm{w}^2)(x'(1+\mathrm{w}^2)))((\mathrm{w}^2)(\overline{y'}(\mathrm{w}^2)))} \\ -yx' \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1+\mathrm{w}^2)(x(1-\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{30}} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}(\mathrm{w}^2(y'\mathrm{w}^2))((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1+\mathrm{w}^2))) \\ \overline{\overline{x'}\,\overline{y}} \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{31}} = \begin{bmatrix} xy \\ -\frac{1}{2}\overline{((1-\mathrm{w}^2)(x'(1-\mathrm{w}^2)))(\overline{y'})} \\ \overline{\overline{x'}\,\overline{y}} \\ \frac{1}{2}\overline{\overline{y'}((1-\mathrm{w}^2)(x(1+\mathrm{w}^2)))} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{\mathbb{T}\xrightarrow{L}A_{32}} = \begin{bmatrix} xy \\ \frac{1}{2}(\mathrm{w}^2(y'\mathrm{w}^2))((1+\mathrm{w}^2)(\overline{x'}(1+\mathrm{w}^2))) \\ \overline{\overline{x'}\,\overline{y}} \\ \frac{1}{2}((1-\mathrm{w}^2)(\overline{x}(1+\mathrm{w}^2)))y' \end{bmatrix}$$

Referencias

[1] L.A. Wills-Toro, **Classification of some graded division algebras I**, submitted to publication.

[2] L.A. Wills-Toro, **Classification of some graded division algebras II**, submitted to publication.

[3] M. Kervaire, **Non-parallelizability of the n-sphere for** $n > 7$, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **44** (1958), 280-283.

[4] R. Bott and J. Milnor, **On the parallelizability of the spheres**, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87-89.

[5] J. Milnor, **Some consequences of a theorem of Bott**, Ann. of Math. (2) **68** (1958), 444-449.

[6] A. Ranicki, **Comentary on On the parallelizability of the spheres by R. Bott and J. Milnor and On the nonexistence of elements of Hopf invariant one by J. F. Adams**, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (2011), 509-511.

[7] N. Jacobson, **Basic Algebra I**, W.H. Freeman and Company, second edition, New York (1985).

[8] N. Jacobson, **Cayley Numbers and normal semisimple Lie algebras of type G**, Duke Math. J., 5 (1939),775.