Stringy Orbifold product in K-theory

Edward Samuel Becerra Rojas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

Stringy Orbifold product in K-theory

Edward Samuel Becerra Rojas

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias-Matemáticas

Director(a):
Phd. Bernardo Uribe
Phd. Lorenzo Acosta

Línea de Investigación:
Topología Algebraica

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de matemáticas
Bogotá, Colombia
2012

(Dedicatoria)

A mi hija Heset María, mi esposa Viviana y mi madre Custodia por sus incansables esfuerzos y apoyos a mi carrera

Agradecimientos

Gracias Bernardo por sus maravillosas ideas y por tanta ayuda que me ha brindado. Gracias Lorenzo por su disposición. Gracias Mario por ayudarme en los cálculo y el análisis de los problemas.

Resumen

Defino un producto fibrado (el producto $\star$) para la K-teoría Orbidad, de una Orbidad del tipo $[M/G]$ dada por la acción casi libre de un grupo de Lie compacto sobre una variedad compacta y casi compleja. Todo el desarrollo es presentado en términos de K-teoría equivariante debido a la consideración de la K-teoría de la Orbidad inercia $\Lambda[M/G]$ asociada a la Orbidad $[M/G]$. Después, generalizo el producto $\star$ a la K-teoría torcida Orbidad de la Orbidad cuando el torcimiento está en la imagen de la transgresión y G es un grupo finito. Finalmente, Presento un isomorfismo de anillos entre las representaciones del álgebra de Drinfeld torcida y la K-teoría Orbidad torcida.

Palabras clave: Orbidades, K-teoría torcida, anillos de representaciones, haces vectoriales, obstrucciones.

Abstract

I define a stringy product (the $\star$ product) for the Orbifold K-theory of an Orbifold structure $[M/G]$ given by the almost-free action of a Compact Lie group on a quasi-complex compact manifold. All this is performed in the equivariant K-theory setup by considering the K-theory of the inertia Orbifold $\Lambda[M/G]$ associated to $[M/G]$. After, I generalize the product $\star$ to the twisted Orbifold K-theory wherever the twist comes by transgression from an element and G is a finite group. Finally I present ring homomorphism to the twisted Drinfeld double algebra $D^\omega(G)$ where the $\star$ product gives an explicit isomorphism from the K-theory ${}^\omega K([*/G])$ to the Grothendieck ring of representations over $D^\omega(G)$, for G a finite group.

Keywords: Orbifolds, Twisted K-theory, representation ring, vector bundles, obstruction.

Contenido

Introducción

Todos mis estudios en topología algebraica han estado motivados por esa maravillosa relación que describe entre los objetos topológicos y las estructuras algebraicas. Las propiedades topológicas, que tienen que ver con la naturaleza geométrica de los objetos, son traducidas por medio de invariantes topológicos en propiedades algebraicas. Cuando asociamos el grupo fundamental, de Homología o de Cohomología, estamos buscando capturar las diferencias entre los objetos topológicos que no serían fácilmente diferenciables por otros invariantes, estamos cambiando la perspectiva de un problema volviendolo al cálculo de una estructura algebraica. De esta manera, como los objetos físicos tienen naturaleza topológica pueden ser estudiados por grupos, módulos y anillos. Estos conceptos no son nada nuevos, ya en el inicio del siglo XX se introdujo el estudio de estas relaciones; con la introducción de nuevos conceptos como el de variedad topológica, el camino lógico ha sido el adaptar y estudiar la incidencia de estas estructuras algebraicas como invariantes de las variedades.

Gracias a los trabajos de Atiyah y Grothendieck a medidados del siglo XX se introdujo un nuevo invariante de la misma naturaleza, el grupo de K-teoría asociado a un espacio topológico en el caso de Atiyah o una variedad algebraica en el caso de Grothendieck. Este nuevo invariante reescribe de alguna manera la información contenida en el grupo de Cohomología pero presenta algunas ventajas desde el punto de vista teórico y en un cierto sentido permite un análisis más sencillo de las propiedades topológicas o algebraicas del objeto. La K-teoría fue en su momento una disciplina muy activa y muchos de sus avances lograron resolver y replantear problemas de vieja data.

Además de los resultados clásicos, durante los últimos veinte años ha ocurrido un suceso poco habitual en matemáticas. Se ha iniciado un gran flujo de nuevas ideas en esta rama por influencia de la aparición de nociones físicas que relacionan unos objetos llamados Orbidades[1] y los invariantes topológicos que se pueden asociar, grupos de homotopía, de Homología, de Cohomología y de K-teoría, entre otros. Particularmente la teoría de cuerdas ha suscitado gran cantidad de importantes trabajos e ideas matemáticas, gracias a la introducción del modelo de teoría de campos conformes sobre espacios singulares por Dixon-Harvey-Vafa-Witten [9, 10] en 1985. Después de esto el auge de trabajos sobre Orbidades y sus invariantes ha reactivado el interés por obtener resultados y reformular problemas en términos de este novedoso punto de vista.

Pero como los invariantes que se le asocian, las Orbidades no son objetos recientes. Una Orbidad es un espacio que localmente se comporta como el cociente de un espacio vectorial

[1]Palabra que en este trabajo usamos como correspondiente en español al concepto de Orbifold del inglés.

por la acción de un grupo finito. Ya habían sido estudiados en geometría algebraica bajo el nombre de variedades con singularidades cocientes y su estudio consistía en intentar remover las singularidades por deformaciones o por levantamientos. En esa dirección existe una gran cantidad de problemas que hacen que esta rama de la geometría algebraica tenga un interés actual por si misma. Empero, el ánimo de este trabajo es usar las Orbidades como una forma de generalización de la noción de variedad topológica en lugar de tratar de hallar desingularizaciones. Esta forma de generalizar las variedades fue primero instaurada por Satake [20] en los años 50 quien las llamó V-variedades considerandolas como espacios topológicos que generalizaban las variedades diferenciales y procedió a generalizar el grupo de Cohomología de De Rham, las clases caracteristicas y el teorema de Gauss-Bonnet para estos espacios. Posteriormente Kawasaki [16] demuestra una versión del teorema del índice para V-variedades expresado como una suma en términos de puntos fijos. Al termino de los años 70, Thurston logra obtener la primera estructura de un invariante topológico asociado a una Orbidad, define el grupo fundamental para la Orbidad.

Como ya he mencionado, las ideas físicas han jugado un importante papel en el desarrollo reciente de la teoría de Orbidades y de sus invariantes topológicos. Los primeros logros en esta dirección se obtuvieron después del trabajo de Dixon-Harvey-Vafa-Witten, quienes usan básicamente intuición física para obtener invariantes topológicos como la caracteristica de Euler, números de Hodge y lograr entre otras cosas la primera idea de una cohomología para la Orbidad que se obtenía como cociente de la acción de un grupo finito sobre una variedad. Empero, estos métodos no son los más indicados para trabajar y deducir los invariantes topológicos para las Orbidades por cuanto sólo traducen algunas propiedades físicas de las Orbidades más no permiten el estudio de una teoría cohomológica adecuada. Chen-Ruan [7] definieron una estructura Cohomológica asociada a una Orbidad siguiendo las mismas ideas usadas en la definición de la cohomología cuántica e introduciendo los llamados sectores torcidos junto con la definición de Orbidad de Inercia. Uno de los avances más interesantes en esta nueva teoría cohomológica para la Orbidad es la obtención de un nuevo objeto llamado el Haz de Obstrucción.

Cuando tenemos una variedad topológica en el sentido clásico, lo que tenemos es un espacio topológico donde algunas vecindades de puntos se comportan exactamente como espacios $\mathbb{R}^n$, lo cual nos aporta mucha información. Pero aunque toda esta información se acople bien cuando reunimos las vecindades, esto no quiere decir que la variedad completa también sea un $\mathbb{R}^n$. Lo que podemos hacer es: dadas dos vecindades U y V de la variedad que localmente son $\mathbb{R}^n$ intentar usar la información concentrada en U y en V para inducir una propiedad en $U \cup V$. Ahora bien, en el caso de una Orbidad, la estructura local son cocientes de $\mathbb{R}^n$ por la acción de un grupo finito. Tal grupo finito puede cambiar al movernos a otra vecindad, lo cual complica aún más la idea de observar propiedades globales de la Orbidad usando la estructura local. El haz de obstrucción aparece dentro de los trabajos de Chen y Ruan como la manera de medir la dificultad de inducir, partiendo de la información de dos vecindades, propiedades de su unión. Este es un proceso que requiere de nuevas consideraciones. Por

una parte, que cada vecindad provenga de una acción de un grupo finito sobre otro espacio implica que la topológia de la vecindad tendrá concentrada tanto la topológia del espacio origen, como su interacción con el grupo que actúa. Por otra parte, ¿cómo acoplar toda esta información para poder observar propiedades globales de la Orbidad? El primer impace se resuelve en parte gracias a la utilización de métodos de la topológia algebraica que son llamados *equivariantes*, los cuales conjugan ambas cosas, tanto la acción de un grupo como la topología del espacio origen. Para el segundo en cambio, se necesita de nuevas ideas, por ejemplo, como el haz de obstrucción de Chen y Ruan.
En virtud de las discusiones anteriores, este trabajo estará distribuido en cuatro partes. Una parte incial de preliminares y recolecciones sobre algunos conceptos básicos de la teoría de Orbidades y de haces vectoriales sobre Orbidades. Una segunda parte donde estudiaremos la construcción de un anillo de K-teoría sobre una Orbidad cociente $[M/G]$ con M una variedad casi compleja y compacta, y G será un grupo de Lie compacto actuando de manera casi libre sobre M. Una tercera parte donde se estudiará la generalización de la construcción presentada en el capítulo II al contexto de K-teoría torcida equivariante. Un cuarto capítulo donde se considera de manera bastante pragmática la aplicación de nuestras construcciones a las algebras de Drinfeld torcidas $D^{\omega}(G)$ donde es posible hallar relaciones no evidentes de la K-teoría torcida y las representaciones de $D^{\omega}(G)$ y se logra conectar la K-teoría torcida Orbidad para dos grupos distintos, mostrando que bajo ciertas condiciones, estos anillos resultan isomorfos. En particular, se logra mostrar la equivalencia de las K-teorías torcidas Orbidad para un p-grupo no abeliano extra especial (p un número primo) y un p-abeliano del mismo orden.
Al final, presento un apéndice donde reúno muchos de las herramientas que podrían no ser tan habituales en los textos clásicos de topología y que en cierta medida utilizo para justificar algunos de los procesos que desarrollo durante la escritura de este trabajo.

1 Orbidades

1.1. Generalidades

Este trabajo ronda en todos sus aspectos el concepto de Orbidad, su definición y propiedades son básicas para todos los resultados presentados en este escrito. Orbidad es el término en español que he elegido como correspondiente para el concepto de *Orbifold* del inglés. Una Orbidad es un espacio topológico modelado localmente como el cociente de una variedad diferenciable por un grupo finito. La estructura de una Orbidad fue definida inicialmente por Satake en [20] y posteriormente retomada en una definición equivalente por Chen y Ruan en [7] y por Adem y Ruan en [2]. En este trabajo se considera la definición tomada por estos últimos.

Como ya adelanté en la introducción una Orbidad puede ser presentada en muchos contextos y con nociones de estructura relativamente diferentes, según la propiedad que se desea estudiar. En virtud de la amplia gama de posibilidades que hay para una Orbidad, es preciso considerar una definición que nos permita una presentación adecuada para los resultados en cuestión, por lo cual, el espíritu de este trabajo es considerar las Orbidades como generalizaciones de variedades diferenciales y por tanto, este primer capítulo deseo dedicarlo a la presentación de algunos resultados que simplificarán el desarrollo y permitirán orientar al lector sobre el objetivo central de este trabajo. Con lo anterior, es conveniente iniciar con una discusión que nos lleve a la definición de Orbidad.

La idea principal en la definición de Orbidad es la idea de sistema uniformizante de dimensión n: dado un espacio topológico conexo U, un sistema –o atlas uniformizante n-dimensional para U–, es una tripla (V, Γ, π) donde V es una variedad diferenciable de dimensión n dotada con una acción de un grupo finito Γ tal que $\pi : V \to U$ es una función continua que envía homeomorficamente el cociente V/Γ sobre U. Dos sistemas uniformizantes (V_1, Γ_1, π_1) y (V_2, Γ_2, π_2) son isomorfos si existen un difeomorfismo $\phi : V_1 \to V_2$ y un isomorfismo $\lambda : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ tal que ϕ es λ-equivariante y $\pi_2 \circ \phi = \pi_1$. Dado $i : U' \to U$ un subconjunto abierto conexo de U, y (V', Γ', π') un sistema uniformizante de U', decimos que (V', Γ', π') es inducido desde (V, Γ, π) si existe un monomorfismo $\tau : \Gamma' \to \Gamma$, tal que si $\gamma \in \Gamma'$ es tal que $\gamma(x) = x$ para todo $x \in V'$ entonces, $\tau(\gamma) = h$ es tal que $h(y) = y$ para todo $y \in V$; además, debe existir una inmersión τ-equivariante $\psi : V' \to V$ tal que $i \circ \pi' = \pi \circ \psi$, el par $(\psi, \tau) : (V', \Gamma', \pi') \to (V, \Gamma, \pi)$ es llamado una inyección. Dos inyecciones $(\psi_1, \tau_1) : (V_1', \Gamma_1', \pi_1') \to (V, \Gamma, \pi)$ y $(\psi_2, \tau_2) : (V_2', \Gamma_2', \pi_2') \to (V, \Gamma, \pi)$ se dicen isomorfas si existen, un isomorfismo (ϕ, λ) entre $(V_1', \Gamma_1', \pi_1')$ y $(V_2', \Gamma_2', \pi_2')$, y un automorfismo $(\bar{\phi}, \bar{\lambda})$ de

(V, Γ, π) tal que $(\bar{\phi}, \bar{\lambda}) \circ (\psi_1, \tau_1) = (\psi_2, \tau_2) \circ (\phi, \lambda)$. De esta manera se tiene que para para cualquier subconjunto abierto U' de U, dado un sistema uniformizante de (V, Γ, π) sobre U, este define una clase de equivalencia de isomorfismos de sistemas uniformizantes de U'. Con la discusión anterior se puede ahora formalizar la definición de Orbidad:

Definición 1.1.1. Un espacio topologico Haussdorf y segundo contable X es llamado una Orbidad si para cada punto $p \in X$ existe una vecindad U_p y un sistema uniformizante (V_p, Γ_p, π_p) de U_p tal que para todo punto $q \in U_p$, (V_p, Γ_p, π_p) y (V_q, Γ_q, π_q) son sistemas equivalentes en q. Se notará por $\mathfrak{U}$ la colección de tales sistemas uniformizantes para todos los puntos de X. Un subconjunto U de X se dice uniformizado por (V, Γ, π) si para todo $p \in U$, (V_p, Γ_p, π_p) y (V, Γ, π) son equivalentes. El espacio X dotado de la estructura de Orbidad, será notado $\mathfrak{X} = (X, \mathfrak{U})$ o si el contexto lo permite sin dar lugar a confusión, simplemente se notará como X.

Nota 1.1.1.
1. Observe que dada la acción de un grupo Γ sobre un espacio topológico U, siempre se tiene un subgrupo Γ_0 de Γ tal que para todo $g \in \Gamma_0$ y para todo $p \in U$, $gp = p$. Tal grupo es llamado el núcleo de la acción. Si el núcleo de la acción es trivial, la acción es llamada efectiva. Una Orbidad $\mathfrak{X}$ se llama efectiva si las acciones de las cartas locales (U_p, Γ_p, π_p) para cada $p \in X$, son efectivas. Esta noción da lugar a la definición de Orbidad correspondiente a una V-variedad definida por Satake [20].

2. No debe confundirse el grupo Γ_p de la definición de un sistema uniformizante con el grupo de isotropía o estabilizador de un punto p (ver Definición 5.2.3). Sin embargo en el contexto de este trabajo, se asume que se tiene una acción casi libre de un grupo de Lie compacto G sobre una variedad compacta M, caso en el cual es posible hallar un sistema uniformizante para el cociente M/G donde el grupo Γ_p coincide con el grupo estabilizador de un punto específico en cada carta (cf. Ejemplo).

3. En el mismo contexto del numeral anterior, es posible asumir que las cartas locales son de la forma $(\mathbb{R}^n, \Gamma, \phi)$ donde Γ actua sobre $\mathbb{R}^n$ via una representación ortogonal. Con esta observación, una Orbidad puede ser considerada como un espacio topológico que localmente es el cociente de un espacio vectorial por la acción de un grupo finito de matrices ortogonales.

Es posible que para una misma Orbidad $\mathfrak{X}$ se presenten dos sistemas uniformizantes distintos. Al igual que con variedades diferenciales, se puede considerar la noción de sistema uniformizante maximal, con lo cual dos sistemas uniformizantes serán equivalentes si están contenidos en el mismo sistema uniformizante maximal.

Definición 1.1.2. Dadas dos Orbidades $\mathfrak{X} = (X, \mathfrak{U})$ y $\mathfrak{Y} = (Y, \mathfrak{V})$, una aplicación diferenciable $f : X \to Y$ se llama suave si para cada punto $x \in X$ existe una carta (U, Γ, ϕ) alrededor de x y una carta (V, H, φ) al rededor de $f(x)$ tal que f aplica $\phi(U)$ sobre $\varphi(V)$ de tal manera que podemos levantar f a una aplicación $\tilde{f} : U \to V$ con $\varphi\tilde{f} = f\phi$. Similarmente, dos Orbidades $\mathfrak{X} = (X, \mathfrak{U})$ y $\mathfrak{Y} = (Y, \mathfrak{V})$ son difeomorfas si existen dos aplicaciones suaves $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $fg = 1_X$ y $gf = 1_Y$.

Ejemplo 1. Considere G un grupo de Lie compacto actuando sobre una variedad compacta M, de manera que la acción sea casi libre. Recuerde que una acción casi libre se refiere a una acción donde todos los grupos estabilizadores son finitos. Para cada $m \in M$, consideramos G_m el grupo estabilizador de m. Como se asume que la acción es localmente diferenciable, pues proviene de un grupo de Lie, existe una rebanada U_m de m la cual es G_m-equivariante. El sistema $\mathfrak{U} = \{(U_m, G_m, \pi_m)\}_{m \in M}$, donde $\pi_m : U_m \to U_m/G_m$ es la proyección natural, forma un sistema uniformizante de $X = M/G$, por lo cual la Orbidad se denota $[M/G] = (X, \mathfrak{U})$ y se llama Orbidad cociente. Cuando el grupo G es finito, su acción es en particular casi libre. En este caso la estructura de Orbidad inducida se llama un cociente global. Con estos criterios, es posible hallar interesantes ejemplos, de los cuales he seleccionado dos de fácil presentación:

- Considere M una variedad compacta. Consideramos el grupo de simetrías en n letras S_n actuando sobre el producto cartesiano M^n por permutación de las coordenadas. Los puntos de M^n tendrán grupo estabilizador acorde a cuantas coordenadas se repiten en el producto cartesiano. Como el grupo S_n es finito, el cociente $[M^n/S_n]$ tiene una estructura de cociente global, la cual es no trivial pues algunos puntos tienen estabilizador diferente del grupo trivial.

- Considere la variedad compacta $\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} | \sum_i |z_i|^2 = 1\}$. Considere la acción del grupo de Lie compacto S^1 sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$ dada por:

  $$\lambda(z_0, \ldots, z_n) = (\lambda^{a_0} z_0, \ldots, \lambda^{a_n} z_n)$$

  donde $a_0, \ldots, a_n$ son números enteros primos relativos. Observe que, el estabilizador de los puntos $\{(0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^{2n+1}\} \cong S^1$ para esta acción es $\{1, \gamma, \cdots, \gamma^{a_i - 1}\}$. Este es un primer ejemplo de una acción casi libre, cuyo cociente adquiere una estructura de Orbidad sin ser un cociente global. El cociente topológico $\mathbb{S}^{2n+1}/S^1$ es habitualmente llamado espacio proyectivo con pesos y notado $\mathbb{WP}(a_0, \ldots, a_n)$.

1.2. Cohomología de Chen-Ruan

Este capítulo presenta construcciones fundamentales para los resultados consignados en este trabajo. Sin embargo la ideas que han inspirado estas construcciones no son totalmente nuevas, de hecho para algunos campos como la física los procedimientos y técnicas utilizadas aquí son bastante naturales. Particularmente, el resultado clave del siguiente capítulo, la definición de un producto fibrado en K-teoría de una Orbidad, es semejante a los trabajos de Chen y Ruan en [7] y de Adem y Ruan en [2]. Sin embargo la manera como son retomadas las ideas, permite mostrar algunos ejemplos que ilustran los resultados y que abren la puerta

al tercer capítulo donde podremos comparar resultados consignados en [3] con los incluidos aquí y establecer las correspondientes relaciones entre un planteamiento y otro. Para motivar la naturaleza de las ideas utilizadas en esta investigación, deseo presentar con una breve exposición de los resultados de [7], y se introducen algunas ideas de interés en los desarrollos que seguirán, tales como los sectores torcidos y los k-multi sectores. De manera específica, se desea mostrar el espíritu de la definición de un producto en K-teoría de una Orbidad, que aparecerá como contraparte de la definición cohomológica presentada en esta sección.
En toda esta sección se toma como referencia el trabajo de Chen y Ruan en [7] aunque también es posible consultar [1] para obtener una exposición muy amplia del mismo desarrollo.
Sea X una Orbidad compacta con (V_p, G_p, π_p) un sistema uniformizante para cada $p \in X$.
Se define el k-multi sector de X, denotándolo X_k, como el conjunto:

$$\{(p, (\mathbf{g}))|p \in X; \mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_k) \in G_p \times \cdots \times G_p\}$$

donde $(\mathbf{g})$ denota la clase de conjugación tal que $(g_1, \ldots, g_k) \equiv (h_1, \ldots, h_k)$ si existe $g \in G_p$ tal que $gg_ig^{-1} = h_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$.

Proposición 1.2.1 (Lema 4.1.1 en ([7]))**.** *El conjunto X_k tiene una estructura de Orbidad dada por:*

$$\{\pi_{p,\boldsymbol{g}} : (V_p^{\boldsymbol{g}}, C(\boldsymbol{g})) \to V_p^{\boldsymbol{g}}/C(\boldsymbol{g})\}$$

donde $V_p^{\boldsymbol{g}} = V_p^{g_1} \cap \cdots \cap V_p^{g_k}$, $C(g)$ es el centralizador de g en G_p para $g \in G_p$ y $C(\boldsymbol{g}) = C(g_1) \cap \cdots \cap C(g_k)$.

Demostración: Primero se identifica un punto $(q, (\mathbf{h})) \in X_k$ con un punto en $\sqcup_{\{(p,(\mathbf{g}))\in X_k\}} V_p^{\mathbf{g}}/C(\mathbf{g})$.
Dado un punto $q \in U_p$ elegimos un punto $y \in V_p$ tal que $\pi_p(y) = q$. Con la elección anterior se obtiene un monomorfismo asociado $\lambda_y : G_q \to G_p$. Si se toma además un elemento $\mathbf{h}$ como representante de la clase $(\mathbf{h})$ y se define entonces $\mathbf{g} = \lambda_y(\mathbf{h})$ tal que $y \in V_p^{\mathbf{g}}$. Se obtiene de esta manera una aplicación $\theta : (q, (\mathbf{h})) \mapsto (y, \mathbf{g})$.
Si se cambia el representante $\mathbf{h}$ por algún $\mathbf{h}' = a^{-1}\mathbf{h}a$ con $a \in G_q$, entonces de la misma forma se cambia $\mathbf{g}$ por $\mathbf{g}' = \lambda_y(\mathbf{h}') = \lambda_y(a^{-1}\mathbf{h}a) = \lambda_y(a)^{-1}\mathbf{g}\lambda_y(a)$ y también la asignación $\theta : (q, a^{-1}\mathbf{h}a) \to (y, \lambda_y(a)^{-1}\mathbf{g}\lambda_y(a))$.
Si se cambia el elemento $y \in V_p$ por algún otro $y' \in V_p$ tal que existe $b \in G_p$ con $y' = by$, entonces $\lambda_{y'} = b\lambda_y b^{-1}$ y se obtiene una identificación distinta de G_q como subgrupo de G_p. En este caso la asignación está dada por $\theta : (q, \mathbf{g}) \to (y', b\mathbf{g}b^{-1})$. En el caso de que $\mathbf{g} = b\mathbf{g}b^{-1}$, entonces $b \in C(\mathbf{g})$. Con lo anterior se ha construido una aplicación de X_k a $\sqcup_{\{(p,(\mathbf{g}))\in X_k\}} V_p^{\mathbf{g}}/C(\mathbf{g})$.
Se elige sobre X_k la topología que hace a los $V_p^{\mathbf{g}}/C(\mathbf{g})$ abiertos y se uniformizan con $(V_p^{\mathbf{g}}, C(\mathbf{g}), \pi_p)$, ($\pi_p$ la proyección natural). Sólo resta mostrar que todos estos sistemas uniformizantes forman una estructura de Orbidad sobre X_k. Considere $x \in V_p^{\mathbf{g}}/C(\mathbf{g})$ y un representante $x' \in V_p^{\mathbf{g}}$. Sean B_x una vecindad suficientemente pequeña de x' y H_x el grupo de isotropía de x' en $C(\mathbf{g})$. Se toma $\pi_p(x') = q$, y se considera el monomorfismo inducido

$\lambda_{x'} : \Gamma_q \to \Gamma_p$. Defina $\mathbf{h} = \lambda_{x'}^{-1}(\mathbf{g})$. Entonces $H_x = \lambda_{x'}(C(\mathbf{h}))$ y se puede entonces identificar B_x con $V_q^{\mathbf{h}}/C(\mathbf{h})$ lo cual muestra que esta es una estructura de Orbidad sobre X_k.$\square$

Es posible ahora identificar las componentes conexas de cada k-multi sector X_k usando la clase de conjugación de monomorfismos $\pi_{pq} : G_q \to G_p$ descritos en la condición de pegado para cada $q \in U_p$. Se define una relación de equivalencia entre las clases de conjugación $(\mathbf{g})_{G_q} \sim (\pi_{pq}(\mathbf{g}))_{G_p}$ y se considera T_k el conjunto de todas las clases de equivalencia. En general se puede escribir $(\mathbf{g})$ para referirse a un elemento del conjunto T_k. Entonces X_k se puede expresar con la unión de componentes conexas:

$$X_k = \bigsqcup_{(\mathbf{g}) \in T_k} X_{(\mathbf{g})}$$

donde

$$X_{(\mathbf{g})} = \{(p, (\mathbf{g}')_{G_p}) | (\mathbf{g}')_{G_p} \in (\mathbf{g})\}.$$

En particular, cuando $k = 1$, cada componente conexa $X_{(g)}$ es llamado sector torcido de X_1 si g es un elemento diferente de la identidad. Se puede definir además el conjunto

$$T_k^0 = \{(\mathbf{g}) \in T_k | \mathbf{g} = (g_1, \ldots g_k) \text{ satisface } g_1 \cdots g_k = 1\},$$

con lo cual

$$X_k^0 = \bigsqcup_{(\mathbf{g}) \in T_k^0} X_{(\mathbf{g})}.$$

Ahora bien, sea $p \in X$ y suponga una estructura casi compleja J sobre X. La estructura casi compleja J induce una representación $\rho_p : G_p \to GL_n(\mathbb{C})$, donde $n = dim_{\mathbb{C}} X$. Para cada $g \in G_p$, se considera $\rho_p(g)$ como la matrix diagonal:

$$diag(e^{\frac{i2\pi m_{1,g}}{m_g}}, \ldots, e^{\frac{i2\pi m_{n,g}}{m_g}}),$$

donde m_g es el orden de $\rho_p(g)$. Una tal matrix sólo depende de la clase de conjugación $(g)_{G_p}$, por lo cual es posible definir una función $d : X_1 \to \mathbb{Q}$ dada por:

$$d(p, (g)_{G_p}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{i,g}}{m_g}.$$

Proposición 1.2.2 (Lema 3.2.1 en ([7]))**.** *La función $d : X_{(g)} \to \mathbb{Q}$ es localmente constante.*

El valor de la función será notado como $d_{(g)}$ y es un número entero cuando $\rho_p(g) \in SL_n(\mathbb{C})$.

Definición 1.2.1. Los grupos de cohomología de Orbidad de X son:

$$H_{orb}^k(X) = \bigoplus_{(g) \in T_1} H^{k-2d_{(g)}}(X_{(g)})$$

donde cada $H^*(X_{(g)})$ es la cohomología singular de $X_{(g)}$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, la cual es isomorfa al grupo de cohomología de de Rham.

Por lo anterior, es posible considerar las clases de cohomología como clases de formas diferenciales sobre $X_{(g)}$. Una forma diferencial w sobre una Orbidad U con sistema uniformizante (V, G, π), es una forma $\tilde{w}$ G-equivariante. Se define la integración de w sobre U como:

$$\int_U^{orb} w := \frac{1}{|G|}\int_V \tilde{w}.$$

En general, si X es una Orbidad con un sistema uniformizante $\{(V_p, G_p, \pi_p)\}$, entonces se considera una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_i\}$ y se define la integral de la forma w como:

$$\int_X^{orb} w := \int_{U_i}^{orb} w.$$

Considere la aplicación C^∞ $I : X_{(g)} \to X_{(g^{-1})}$ definida por $(p,(g)) \mapsto (p,(g^{-1}))$ la cual es un automorfismo de X_1 en si mismo.

Proposición 1.2.3 (Proposición 3.3.1 en ([7])). *Para todo* $0 \le k \le 2n$ *el par* $\langle , \rangle_{orb}^{(g)}$: $H^{k-2d_{(g)}}(X_{(g)}) \times H^{2n-k-2d_{(g^{-1})}}(X_{(g^{-1})})$ *definido por:*

$$\langle \alpha, \beta\rangle_{orb}^{(g)} = \int_{X_{(g)}}^{orb} \alpha \wedge I^*(\beta),$$

es no degenerado.

1.2.1. Orbidades 2-dimensionales reducidas

Una Orbidad 2-dimensional cerrada y reducida es una estructura que consta de los siguientes datos: Una superficie de Riemann Σ con estructura compleja J y un conjunto finito de puntos distintos $\mathbf{z} = (z_1, \dots z_k)$ sobre Σ, cada uno con multiplicidad $m_i \ge 2$, tal que la estructura de Orbidad en el punto z_i esté dada por la cubierta ramificada $z \mapsto z^{m_i}$. Una aplicación $\tilde{\pi}$ de clase C^∞ entre dos Orbidades 2-dimensionales cerradas y reducidas es llamada un cubrimiento de Orbidades si los levantamientos locales de $\tilde{\pi}$ son o bien difeomorfismos o bien cubiertas ramificadas. Es posible mostrar que existe un cubrimiento de Orbidades universal cuyo grupo de transformaciones de Deck es definido como el grupo fundamental de la Orbidad y es notado $\pi_1^{orb}(\Sigma)$. Para cada subgrupo $\Gamma \subset \pi_1^{orb}(\Sigma)$ es posible hallar un cubrimiento de Orbidades $\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma} \to \Sigma$ tal que $\tilde{\pi}$ induce un monomorfismo $\pi_1^{orb}(\tilde{\Sigma}) \to \pi_1^{orb}(\Sigma)$ con imagen el subgrupo Γ. El grupo fundamental de $(\Sigma, \mathbf{z}, (m_1, \dots, m_k))$ una Orbidad 2-dimensional cerrada y reducida tiene la representación:

$$\pi_1^{orb}(\Sigma) = \{x_i, y_i, \lambda_j, i = 1, \dots, g, j = 1, \dots, k|\ \amalg_i x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \amalg_j \lambda_j = 1, \lambda_j^{m_j} = 1\}$$

donde g es el género de Σ. Considere la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$ con tres puntos marcados $\mathbf{z} = (0, 1, \infty)$. Tome $(\mathbf{g}) \in T_3^0$ representado por $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ tal que el orden de g_i es m_i para cada $i = 1, 2, 3$. Se determina una estructura de Orbidad 2-dimensional cerrada y reducida sobre $\mathbb{S}^2$ poniendo (m_1, m_2, m_3) como las multiplicidades de $\mathbf{z}$. Entonces el grupo $\pi_1^{orb}(\mathbb{S}^2)$ tiene la forma:

$$\pi_1^{orb}(\mathbb{S}^2) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 | \lambda_i^{m_i} = 1, \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1\}$$

y cada generador λ_i puede ser representado geometricamente como un lazo rodeando el punto marcado z_i. Ahora por cada punto $(p, (\mathbf{g})_{G_p}) \in X_{(\mathbf{g})}$ se escoge una representación $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ de $(\mathbf{g})_{G_p}$, la cual define un homomorfismo $\rho_{p,\mathbf{g}} : \pi_1^{orb}(\mathbb{S}^2) \to G_p$ enviando λ_i a g_i. Considere $H \subset G_p$ la imagen de $\rho_{p,\mathbf{g}}$. Existe una Orbidad 2-dimensional reducida Σ y un cubrimiento de Orbidades $\tilde{\pi} : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ induciendo la siguiente sucesión exacta:

$$1 \to \pi_1(\Sigma) \to \pi_1^{Orb}(\mathbb{S}^2) \to H \to 1.$$

El grupo H actúa sobre Σ como el grupo de transformaciones de Deck cuya finitud implica que Σ es cerrada. Con lo anterior, se ha obtenido un sistema uniformizante $(\Sigma, H, \tilde{\pi})$ sobre $(\mathbb{S}^2, \mathbf{z}, (m_1, m_2, m_3))$ que depende de $(p, \mathbf{g})$ pero que es localmente constante.
Sobre la carta local $(V_p^{\mathbf{g}}, C(\mathbf{g}))$ de $X_{(\mathbf{g})}$, se considera el haz $E_{(\mathbf{g})}$ definido como:

$$(H^1(\Sigma) \otimes TV_p)^H \times V_p^{\mathbf{g}} \to V_p^{\mathbf{g}},$$

donde $(H^1(\Sigma) \otimes TV_p)^H$ es el espacio invariante por la acción de H. Considere la acción del grupo $C(\mathbf{g})$ sobre $H^1(\Sigma) \otimes TV_p$, que es trivial en el primer factor y la usual sobre TV_p. Esta acción del grupo $C(\mathbf{g})$ conmuta con la acción de H, luego $(H^1(\Sigma) \otimes TV_p)^H$ es un espacio invariante para el grupo $C(\mathbf{g})$. Luego tenemos un haz $E_{(\mathbf{g})}$ sobre $X_{(\mathbf{g})}$ que es $C(\mathbf{g})$-equivariante.

Definición 1.2.2. Para $\alpha, \beta, \gamma \in H^*_{orb}(X)$, considere la función de tres puntos:

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{orb} = \sum_{(\mathbf{g}) \in T_3^0} \int_{X_{(\mathbf{g})}}^{orb} e_1^*\alpha \wedge e_2^*\beta \wedge e_3^*\gamma \wedge e(E_{(\mathbf{g})}),$$

donde $e_i : X_{(\mathbf{g})} \to X_{(g_i)}$ es la aplicación $(p, (\mathbf{g})_{G_p}) \mapsto (p, (g_i)_{G_p})$ para cada $i = 1, 2, 3$ y $e(E_{(\mathbf{g})})$ denota la clase de Euler del haz $E_{(\mathbf{g})}$. Esta función determina un producto en $H^*_{orb}(X)$ [1].

1.3. Grupoides

La inclusión de grupoides en esta sección tiene el proposito de generalizar, en cierta manera, las Orbidades dentro del contexto de estructuras muy ricas en cuanto a resultados y generalidad de conceptos. Como cuando se tienen acciones de grupos, los grupoides generalizan las ideas de órbita de la acción y de grupo de isotropía de un elemento. Sin embargo su estructura teórica es bastante más general y las construcciones evaden algunos problemas del trabajo con acciones de grupo, en particular cuando el grupo es no abeliano. La referencia para esta sección es [1].
Un grupoide topológico es una estructura $\mathfrak{G}$ que consiste de un espacio G_0 de objetos y un espacio G_1 de flechas, dotado con cinco morfismos estructurales:

- Una aplicación $s : G_1 \to G_0$, que asigna a cada flecha $g \in G_1$ su origen.
- Una aplicación $t : G_1 \to G_0$, que asigna a cada flecha $g \in G_1$ su llegada. Así para dos objetos $x, y \in G_0$, se escribe $x \xrightarrow{g} y$ para decir que g es un elemento en G_1 con $s(g) = x$ y $t(g) = y$.
- La aplicación de composición $m : G_1 \times G_1 \to G_0$. Si $g, h \in G_1$, con $s(h) = t(g)$, es posible componer a h y g pidiendo que $s(hg) = s(g)$ y $t(hg) = t(h)$. La aplicación composición define entonces un producto asociativo sobre el conjunto:

$$G_1{}^s \times_t G_1 = \{(h, g) \in G_1 \times G_1 : s(h) = t(g)\}.$$

- Existe una aplicación identidad $u : G_0 \to G_1$ la cual es una unidad para la composición. Esto quiere decir que $su(x) = x = tu(x)$ y que $gu(x) = g = u(y)g$ para todo $x, y \in G_0$ y $g : x \to y$.
- Una aplicación inversa $i : G_1 \to G_1$ escrita como $i(g) = g^{-1}$. Entonces, si $g : x \to y$ se tiene que $g^{-1} : y \to x$ y $g^{-1}g = u(x)$, $gg^{-1} = u(y)$.

Definición 1.3.1. Un grupoide de Lie es un grupoide topológico $\mathfrak{G}$ donde G_0, G_1 son variedades diferenciables y las aplicaciones s, t, m, u, i son diferenciables. Adicionalmente, las aplicaciones s, t deben ser submersiones sobreyectivas.

Ejemplo 2. Suponga que tenemos un grupo de Lie G actuando sobre una variedad diferenciable M. Dada la acción, podemos defnir un grupoide de Lie asociado $G \ltimes M$ considerando $(G \ltimes M)_0 = M$ y $(G \ltimes M)_1 = G \times M$, con $s : G \times M \to M$ la proyección en la segunda componente y $t : G \times M \to M$ es la acción. La aplicación de composición es definida a partir de la multiplicación en el grupo G. Note que si M se reduce a un punto, es posible ver el grupo de Lie G como un grupoide de Lie.

Dado un punto $x \in G_0$ en un grupoide de Lie $\mathfrak{G}$, se puede considerar el conjunto de todas las flechas en G_1 que parten de x y terminan en x. Este conjunto es un grupo de Lie notado por G_x y es llamado el grupo de isotropía de x. Se considera también el conjunto $ts^{-1}(x)$ la llegada de todas las flechas en G_1 que parten de x llamado la órbita de x. El conjunto de todas las órbitas de elementos en G_0 es notado con $|\mathfrak{G}|$ y a su vez el grupoide $G \ltimes M$ es llamado una representación grupoide de $|G \ltimes M|$.

Definición 1.3.2. Sea $\mathfrak{G}$ un grupoide de Lie.

- $\mathfrak{G}$ es propio si $(s, t) : G_1 \to G_0 \times G_0$ es una aplicación propia, esto es, si la imagenes inversas de conjuntos compactos son compactas.
- $\mathfrak{G}$ es llamado un grupoide de foliación si cada grupo de isotropía G_x es discreto.
- $\mathfrak{G}$ es *étale* si s, t son difeomorfismos locales.

Proposición 1.3.1. *Si el grupoide de Lie $\mathfrak{G}$ es de foliación y propio, entonces todos los grupos de isotropía G_x para $x \in G_0$ son finitos.*

Si se tiene un grupoide étale $\mathfrak{G}$, dado $x \in G_0$, existe una vecindad suficientemente pequeña U_x de x en la cual G_x actua de la siguiente manera: dado $g \in G_x$, considere $\phi : U_x \to V_g$ la inversa local de la aplicación s. Es posible asumir también que la aplicación t envía V_g difeomorficamente sobre U_x. Se define entonces el difeomorfismo $\tilde{g} : U_x \to U_x$ como la aplicación $\tilde{g} = t\phi$. Se tiene entonces una aplicación $G_x \to Diff(U_x)$.

Definición 1.3.3. Un *grupoide orbidad* es grupoide de Lie que es propio y étale.

Note que en el caso de una Orbidad cociente $[M/G]$, es posible considerar muchas estructuras equivalentes de Orbidad sobre el mismo espacio M/G, lo cual da lugar a varias representaciones grupoides $\mathfrak{G}$. Por lo anterior, es necesario considerar las aplicaciones entre estructuras grupoides, con el fin de determinar cuándo son equivalentes como representaciones grupoides del mismo espacio.

Definición 1.3.4. Sean $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{H}$ dos grupoides de Lie. Un homomorfismo $\phi : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$ consiste de dos aplicaciones $\phi_0 : H_0 \to G_0$ y $\phi_1 : H_1 \to G_1$ las cuales conmutan con todos los morfismos de estructura de ambos grupoides.

Dado el grupoide Orbidad $\mathfrak{G}$, un $\mathfrak{G}$-espacio es una variedad E equipada con dos aplicaciones $\pi : E \to G_0$ y una acción $\mu : G_1 \times_{G_0} E \to E$ definida sobre las parejas (g, e) tales que $\pi(e) = s(g)$, de manera que la acción es definida como: $\mu(g, e) = ge$.

Ejemplo 3. Considere un grupoide $\mathfrak{G}$. Se define el conjunto $|\mathfrak{G}^k| := \{(x, (g_1, \ldots, g_k)_{G_x})|x \in |\mathfrak{G}|, g_i \in G_x\}$. Ahora tome el espacio:

$$S^k_{\mathfrak{G}} := \{(g_1, \ldots, g_k)|g_i \in G_1, s(g_1) = t(g_1) = s(g_2) = t(g_2) = \cdots = s(g_k) = t(g_k)\}.$$

Este espacio es una variedad diferenciable. Se define entonces la aplicación $\beta_k : S^k_{\mathfrak{G}} \to G_0$ por

$$\beta_k(g_1, \ldots, g_k) = s(g_1) = t(g_1) = s(g_2) = t(g_2) = \cdots = s(g_k) = t(g_k).$$

Luego se considera la acción definida para cada $h \in G_1$ como la aplicación $h : \beta_k^{-1}(s(h)) \to \beta_k^{-1}(t(h))$ tal que

$$h(g_1, \ldots, g_k) = (hg_1h^{-1}, \ldots, hg_kh^{-1}).$$

Con esta acción el espacio $S^k_{\mathfrak{G}}$ es un $\mathfrak{G}$-espacio, luego podemos formar el grupoide $\mathfrak{G} \ltimes S^k_{\mathfrak{G}}$ cuyo espacio de orbitas es el espacio $|\mathfrak{G}^k|$.

1.3.1. Haces vectoriales Orbidad sobre Orbidades y grupoides

Dada una Orbidad $\mathfrak{X} = (X, \mathfrak{U})$, es posible comparar su estructura con la estructura de una variedad diferenciable. Particularmente, la manera como se pegan las cartas locales del atlas uniformizante $\mathfrak{U}$. Por ejemplo dadas las cartas $(\tilde{U}, G, \pi)$ y $(\tilde{V}, H, \rho)$ de un punto $x \in U \cap V$. Al rededor de x podemos hallar una tercera carta $(\tilde{W}, K, \mu)$ y dos inyecciones λ_1, λ_2 de esta carta en las otras dos respectivamente, tal que $W \subset U \cap V$. Estas inyecciones pueden ser usadas para obtener un difeomorfismo $\lambda_2 \lambda_1^{-1} : \lambda_2(\tilde{W}) \to \lambda_2(\tilde{W})$. Con lo anterior, podemos proceder a pegar los cocientes de las cartas de acuerdo a la relación $\pi(\tilde{u}) \sim \rho(\tilde{v})$ si $\lambda_2 \lambda_1^{-1}(\tilde{u}) = \tilde{v}$ para definir el espacio:

$$Y = \bigsqcup_{(\tilde{U}, G, \pi) \in \mathfrak{U}} (\tilde{U}/G)/\sim .$$

Naturalmente, tenemos un homeomorfismo $\Phi : Y \to X$. Con esta misma idea podemos construir un haz tangente para la Orbidad $\mathfrak{X}$. Sobre cada carta $(\tilde{U}, G, \pi)$ podemos considerar el haz tangente $T\tilde{U}$. Si la acción de G sobre $\tilde{U}$ se supone diferenciable -como es el caso de las acciones de grupos de Lie sobre variedades-, entonces esto induce una acción diferenciable sobre $T\tilde{U}$, dada por $g(\tilde{u}, v) = (g\tilde{u}, D_{g\tilde{u}}(v))$ para cada elemento $(\tilde{u}, v) \in T\tilde{U}$. De hecho, la proyección $\tilde{p} : T\tilde{U} \to \tilde{U}$ es equivariante, por lo cual se obtiene una aplicación proyección $p : T\tilde{U}/G \to U$ al componer con π. Ahora, si $x = \pi(\tilde{x})$, las fibras son homeomorfas a cocientes de la forma $T_{\tilde{x}}\tilde{U}/G_x$, donde G_x es el grupo de isotropía de la acción de G sobre $\tilde{x}$. Es posible suponer que localmente se tienen cartas de la forma $(\mathbb{R}^n, G', \pi)$, donde $G' \subset GL_n(\mathbb{R})$. Ahora siguiendo el proceso discutido para una Orbidad, podemos construir una Orbidad con cartas locales de la forma $(T\tilde{U}, G, p)$ sobre $TU = T\tilde{U}/G$ para cada carta $(\tilde{U}, G, \pi) \in \mathfrak{U}$. Notamos el espacio resultante de la identificación por $TX = \bigsqcup_{(\tilde{U}, G, \pi) \in \mathfrak{U}} (T\tilde{U}/G)/\sim$. Este espacio no es un haz vectorial en el sentido usual de variedades diferenciables, pero puede considerarse como su análogo en Orbidades. Puede llamarse entonces, un haz vectorial tangente de una Orbidad y notarlo por $T\mathfrak{X} = (TX, T\mathfrak{U})$, con $T\mathfrak{U} = \{(T\tilde{U}, G, p)\}_{(\tilde{U}, G, \pi) \in \mathfrak{U}}$. Este es un caso particular de una clase de objetos generalizan la idea de haz vectorial para un Orbidad, y que se conviene en llamar haces vectoriales Orbidad.
Por propositos prácticos se acostumbra a introducir este tipo de objetos de manera más amplia y considerarlos dentro del lenguaje de grupoides.

Definición 1.3.5. Un $\mathfrak{G}$-haz vectorial sobre un grupoide Orbidad $\mathfrak{G}$ es un $\mathfrak{G}$-espacio E tal que $\pi : E \to G_0$ es un haz vectorial y tal que cada flecha $g : x \to y$ induce un isomorfismo lineal en las fibras $g : E_x \to E_y$. Particularmente, cada E_x induce una representación lineal del grupo de isotropía G_x para cada $x \in G_0$.

Cada $\mathfrak{G}$-haz vectorial induce un grupoide $\mathfrak{E} = \mathfrak{G} \ltimes E$ y considerando la proyección natural $\pi_E : \mathfrak{E} \to \mathfrak{G}$, se obtiene el análogo de un haz vectorial en términos de grupoides, donde la proyección inducida $\pi_{|E|} : |\mathfrak{E}| \to |\mathfrak{G}|$ induce la estructura de haz vectorial Orbidad, de manera que $\pi_{|E|}^{-1}(x) = E_x/G_x$.

Ejemplo 4.

- Suponga G un grupo de Lie actuando diferencial, propia y casi libremente sobre una variedad M, y sea E un G-haz vectorial. El espacio E/G admite una estructura de Orbidad cociente de manera tal que $p : E/G \to M/G$ tiene estructura de haz vectorial Orbidad. En el otro sentido, si $p : F \to M/G$ es un haz vectorial Orbidad, entonces p^*F es un G-haz vectorial sobre M. Ahora, la acción de G sobre M induce una estructura grupoide de Lie $G \ltimes M$ y desde la definición de un G-haz vectorial, se tiene que un haz vectorial equivariante es naturalmente un $G \ltimes M$-haz vectorial.
- Suponga que en el ejemplo anterior $M = *$, es decir, que nos reducimos al caso de un punto. Considere el grupoide que se genera el cual puede denotarse $*^G$. Un $*^G$-haz vectorial es entonces una representación de G.

1.4. K-teoría de una Orbidad

Definición 1.4.1. Sea $\mathfrak{G}$ un grupoide Orbidad tal que $|\mathfrak{G}|$ es un espacio compacto. Se define $K_{orb}(\mathfrak{G})$ como el anillo de Grothendieck de clases de isomorfismo de $\mathfrak{G}$-haces vectoriales sobre $\mathfrak{G}$. Para una Orbidad $\mathfrak{X}$, se toma $\mathfrak{G}$ una representación grupoide y se define $K_{orb}(\mathfrak{X}) = K_{orb}(\mathfrak{G})$.

Ahora si se tiene un morfismo $F : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$, es posible definir un pullback de los haces vectoriales Orbidad sobre $\mathfrak{G}$ a haces vectoriales Orbidad sobre $\mathfrak{H}$. De hecho, dado un tal morfismo esto induce una aplicación de anillos: $F^* : K_{orb}(\mathfrak{G}) \to K_{orb}(\mathfrak{H})$.

Ejemplo 5. Considere G un grupo de Lie compacto actuando de manera casi libre sobre una variedad compacta M. Como ya noté antes, esto induce una estructura de grupoide de Lie asociada $G \ltimes M$, donde los haces vectoriales Orbidad son haces vectoriales G-equivariantes sobre M. Es decir, se tiene una identificación de $K_{orb}(G \ltimes M) := K_{orb}([M/G]) = K_G(M)$.

1.4.1. Fórmula de descomposición para K-teoría

Considere ahora el caso específico de la Orbidad cociente $[M/G]$, donde M es una variedad compacta y G es un grupo de Lie actuando de manera casi libre sobre M. En este caso es conveniente presentar una fórmula de descomposición para la K-teoría de Orbidad, la cual se basa en la existencia de un caracter de Chern equivariante, y que fue demostrada por Adem y Ruan en [2]. La fórmula es presentada en la siguiente Proposición (ver [2] Teorema 5.1):

Proposición 1.4.1. *Sea G un grupo de Lie compacto, actuando sobre una variedad compacta M de manera casi libre. Existe un caracter de Chern equivariante el cual define un isomorfismo racional de anillos:*

$$K_{orb}([M/G]) \cong_{\mathbb{Q}} \prod_{(C)} \left[H^*(M^C/\boldsymbol{C}_G(C)) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{|C|})\right]^{\boldsymbol{W}_G(C)}$$

donde (C) varía sobre todas las clases de conjugación de subgrupos cíclicos de G, $\zeta_{|C|}$ es una raíz primitiva de la unidad y $\boldsymbol{W}_G(C) = \boldsymbol{N}_G(C)/\boldsymbol{C}_G(C)$ -para $\boldsymbol{N}_G(C)$ el normalizador, $\boldsymbol{C}_G(C)$ el centralizador de C en G-,es necesariamente un grupo finito.

Corolario 1.4.2. *Sea G un grupo de Lie compacto, actuando sobre una variedad compacta M de manera casi libre. Existe una descomposición aditiva:*

$$K_{orb}([M/G]) \otimes \mathbb{Q} = K_G(M) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{(g)} K(M^g/\boldsymbol{C}_G(g)) \otimes \mathbb{Q}.$$

2 Definición de un Producto Fibrado

2.1. Introducción

En vista de las construcciones presentadas en el capítulo anterior para llegar a la definición de la cohomología de Chen-Ruan para una Orbidad, se desea presentar las construcciones dentro del contexto de K-teoría equivarariante que permitan obtener una estructura similar para la Orbidad. Intuitivamente, las construcciones en K-teoría son más interesantes que las construcciones en cohomología, debido en parte a que las construcciones cohomológicas presentadas en el Capítulo 1 utilizan coeficientes en un cuerpo sin torsión, mientras que las construcciones en K-teoría aparecen con coeficientes enteros. Lo anterior implica que la K-teoría no puede ingnorar la torsión que puede aparecer, mientras que las construcciones cohomológicas pierden toda esa torsión, la cual puede representar una importante suma de información topológica de la Orbidad. Lo anterior permite suponer que es la K-teoría, y no la cohomología, el contexto natural para intentar obtener la información topológica de la Orbidad. Ahora bien, teniendo en cuenta la relación clásica entre cohomología y K-teoría –vía el caracter de Chern–, la információn concentrada en la cohomología puede ser recuperada con la K-teoría. Esto implica que las construcciones en el lado de la K-teoría para una Orbidad deben estar presentadas en forma dual a las de la cohomología de Chen-Ruan, lo cual permitiría de forma natural –vía algún tipo de carácter de Chern adecuado– recuperar la información dada por la construcción cohomológica pero para las Orbidades. Esto no es muy simple desde el punto de vista topológico puesto que en general cuando se tiene una estructura de Orbidad $\mathfrak{X}$, las cartas abiertas locales en cada punto sólo son compatibles de acuerdo a la acción local de los grupos en cada carta, pero al pensar las cartas abiertas como sub-estructuras topológicas, no necesariamente podremos definir, de la misma manera que para una variedad, una K-teoría para la unión. Cuando tenemos una variedad clásica, el que dos subvariedades se intersecten transversalmente implica que podemos pegar la información contenida en cada una de ellas para obtener información global de la variedad. En particular este es el requisito que ponemos a las cartas locales de la variedad para tener la estructura de variedad. En el caso de una Orbidad, esto genera un problema de obstrucción que se muestra en la necesidad de construir haces que concentren ese posible defecto de la estructura de Orbidad, generado por la no trasversalidad de las cartas.

2.2. El Producto Fibrado

A partir de este momento, la presentación estará enmarcada dentro del contexto equivariante determinado por una acción de un grupo de Lie compacto actuando sobre una variedad compacta M dotada con una estructura casi compleja. El objetivo es definir una estructura de K-teoría para $[M/G]$, la Orbidad obtenida por la acción de G sobre M. Como se dijo antes, las definiciones y construcciones en la parte K-teorética deben ser duales a las definiciones cohomológicas y por lo tanto, es esperado que una tal relación se mantenga en el contexto de las Orbidades. Por lo anterior, algunas de las construcciones son análogas a las presentadas por Chen y Ruan en [7] y reescritas en el capítulo anterior. Un inicio intuitivo podría ser construir pequeños grupos de K-teoría sobre cada sector torcido de la Orbidad, para luego, en analogía con las construcciones de [7], lograr definir un producto sobre la suma directa de estos grupos de forma que el resultante grupo sea además un anillo gracias al producto definido. Lamentablemente, la mejor alternativa no es simular las construcciones cohomológicas al pie de la letra, pues las consideraciones para el trabajo con haces vectoriales son bastante más difíciles que en la contraparte cohomológica donde las formas diferenciales son una herramienta muy provechosa. Sin embargo, la idea es la misma, definir una estructura de K-teoría a partir de grupos de K-teoría más simples y luego definir un producto que convierta la suma directa de esos grupos en un anillo. Naturalmente, para mantener la relación clásica entre K-teoría y cohomología, será necesario que las estructuras al final estén relacionadas por dualidad.
Considere el siguiente espacio vectorial:

$$K_{orb}([M/G]) := \bigoplus_{g\in\tilde{C}} K_{C(g)}(M^g)$$

donde $\tilde{C}$ es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de los elementos $g \in G$ para los cuales el conjunto $Stab(g) := \{x \in M | gx = x\}$ es no vacío (ver Apéndice A, ecuación 5.1) y $C(g)$ denota el centralizador de g en G. El objetivo de este Capítulo es dotar este espacio vectorial de un producto asociativo que lo convierta en una estructura de anillo. Se podría elegir una definición del producto que sea intuitivamente más sencilla, simplemente definiendo el producto de dos haces en este espacio vectorial por el producto tensorial usual, pero es notado, en virtud de la cohomología para Orbidades definida por Chen y Ruan que una definición como esa no es la más indicada para la contraparte de K-teoría. Como se notó en la introducción de este capítulo, observe que dos subvariedades[1] M^h y M^g para cualesquiera $h, g \in G$ no siempre se intersectan transversalmente, lo cual genera un problema de obstrucción en los haces. Por esta razón, para definir un producto adecuado y que corresponda por analogía –en principio– con la contraparte cohomológica de la teoría de Orbidades definida por Chen y Ruan, es necesario adicionar un factor de corrección

[1] Note que los puntos fijos de un elemento son subvariedades de M gracias a la compacidad del grupo G y de la variedad M.

topológica dentro del producto. Se presentan entonces algunos resultados de interés para los desarrollos posteriores.

2.2.1. Algunas anotaciones sobre grupos de Lie

Sea G un grupo de Lie compacto. Dados K, H subgrupos cerrados de G, note que H actúa sobre el espacio G, mediante la acción natural $(h, a) \mapsto ah$, para $h \in H$ y $a \in G$. A su vez, observe que K actúa sobre el espacio G/H, mediante la acción natural $(k, aH) \mapsto kaH$, para $k \in K$ y $aH \in G/H$. Como G es compacto, el espacio G/H es un espacio compacto. En virtud del Lema 5.2.2 demostrado en el Apéndice A, existe sólo un número finito de tipos de órbita para la acción de K en G/H. Por lo anterior, el espacio de órbitas $K\backslash G/H$ es la unión de tipos de órbita $(G/H)_{(K_j)}$ con $K_j \subset K$, cada uno de los cuales es la unión de un número finito de componentes conexas. Por lo anterior, se puede suponer que el espacio de órbitas $K\backslash G/H$ es una suma finita de componentes $\cup_{i=1}^{k} U_i$, de tal manera que $a_i H \in G/H$ es un elemento en la componente conexa U_i si y sólo si K_{a_i} pertenece al tipo de órbita donde vive la componente conexa. Habitualmente el espacio $K\backslash G/H$ es llamado el cociente doble de G por los grupos H y K.

Proposición 2.2.1 ([19], Lema 2.2)**.** *Sea G un grupo de Lie compacto y H un subgrupo cerrado de G y para cada elemento $g \in G$, sea $(G/H)^g$ el espacio de puntos fijos de la acción de g sobre G/H. Un elemento $aH \in G/H$ vive en $(G/H)^g$ si y sólo si $a^{-1}ga \in H$. Si $a_1 H$ y $a_2 H$ viven en la misma componente conexa de $(G/H)^g$, entonces, $a_1 H = x a_2 H$ para algún $x \in C(g)$.*

Ahora bien, para H un subgrupo cerrado de G, dado M un G- espacio, este espacio naturalmente tiene una H acción vía la restricción a la acción de los elementos de H, la cual induce una aplicación

$$Rest_H^G : K_G(M) \to K_H(M),$$

tal que a cada G-haz vectorial, se le asocia el mismo haz vectorial pero con la acción de G restringida a los elementos de H. Análogamente, dado un H-haz vectorial E sobre un H-espacio M, se puede definir el G-haz:

$$G \otimes_H E,$$

de manera análoga a la definición del G-espacio de la ecuación (5.2) en el Apéndice A (cf. [21] Capítulo I). Este G-haz define entonces una aplicación

$$Ind_H^G : K_H(M) \to K_G(M).$$

Las aplicaciones $Rest_H^G$ e Ind_H^G, definidas arriba satisfacen algunas propiedades que serán de algún interés en los desarrollos posteriores, para una exposición completa de estos tópicos se sugiere remitirse a [22, 13, 19].

Teorema 2.2.2. *Si $K \subset H \subset G$, entonces las aplicaciones restricción e inducción satisfacen:*

$$Ind_H^G Ind_K^H(V) \cong Ind_K^G(V)$$

y

$$Rest_K^H Rest_H^G(W) \cong Res_K^G(W)$$

para todo K-haz vectorial V y G-haz vectorial W.

Teorema 2.2.3 (Reciprocidad de Frobenius)**.** *Sea G un de Lie compacto y H, K dos subgrupos cerrados de G. Para V un H-haz vectorial y W un K-haz vectorial se tiene la siguiente fórmula:*

$$Ind_H^G(V \otimes Rest_H^G(Ind_K^G(W))) \cong Ind_H^G(V) \otimes Ind_K^G(W) \tag{2.1}$$

Para mayor simplicidad en las fórmulas las aplicaciones $Rest_H^G$ e Ind_H^G se notarán respectivamente R_H^G e I_H^G. Considere $f : M \to N$ una aplicación continua G-equivariante entre G-espacios. Esta función define homomorfismos de pullback de G-haces vectoriales:

$$f^* : K_G(N) \to K_G(M)$$

y pushforward de G-haces vectoriales:

$$f_* : K_G(M) \to K_G(N).$$

Lema 2.2.4. *Los siguientes diagramas son conmutativos:*

$$\begin{array}{ccc} K_G(N) & \overset{R_H^G}{\to} & K_H(N) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ K_G(M) & \overset{R_H^G}{\to} & K_H(M) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_G(N) & \overset{R_H^G}{\to} & K_H(N) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ K_G(M) & \overset{R_H^G}{\to} & K_H(M) \end{array} \tag{2.2}$$

$$\begin{array}{ccc} K_G(N) & \overset{I_H^G}{\to} & K_H(N) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ K_G(M) & \overset{I_H^G}{\to} & K_H(M) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_G(N) & \overset{I_H^G}{\to} & K_H(N) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ K_G(M) & \overset{I_H^G}{\to} & K_H(M) \end{array} \tag{2.3}$$

2.2.2. Construcción del producto

Considere el espacio vectorial:

$$K_{orb}([M/G]) := \bigoplus_{g \in \tilde{C}} K_{C(g)}(M^g) \tag{2.4}$$

donde $\tilde{C}$ es el conjunto de representantes de las clases de conjugación de los elementos $g \in G$ tales que el conjunto $Stab(g) := \{x \in M | gx = x\}$ es no vacío (ver Apéndice A, ecuación

(5.1)) y $C(g)$ denota el centralizador de g en G. Para cada par de elementos $g, h \in G$ considere las inclusiones

$$e_g : M^{g,h} = M^g \cap M^h \to M^g, e_h : M^{g,h} = M^g \cap M^h \to M^h$$

y

$$e_{gh} : M^{g,h} = M^g \cap M^h \to M^{gh}.$$

Las dos primeras aplicaciones inducen pullback en K-teoría equivariante, particularmente $e_g^* : K_H(M^g) \to K_H(M^{g,h})$ y $e_h^* : K_H(M^h) \to K_H(M^{g,h})$, donde H es un subgrupo cerrado de $C(g) \cap C(h)$. Por otra parte, la aplicación e_{gh} induce el pushforward en K-teoría equivariante $(e_{gh})_* : K_H(M^{gh}) \to K_H(M^{g,h})$.
Note que el centralizador de un elemento $g \in G$ es siempre un subgrupo cerrado de G. Como G es un grupo compacto de Lie, $C(g)$ es también un grupo compacto de Lie. Dadas las inclusiones de grupos de Lie:

$$i_g : C(g) \cap C(h) \to C(g), i_h : C(g) \cap C(h) \to C(h) \text{ e } i_{gh} : C(g) \cap C(h) \to C(gh)$$

se generan las aplicaciones:

$$R^{C(g)}_{C(g)\cap C(h)} : K_{C(g)}(M^g) \to K_{C(h)\cap C(g)}(M^g), R^{C(h)}_{C(g)\cap C(h)} : K_{C(h)}(M^h) \to K_{C(h)\cap C(g)}(M^h)$$

e

$$I^{C(gh)}_{C(g)\cap C(h)} : K_{C(h)\cap C(g)}(M^{g,h}) \to K_{C(gh)}(M^{g,h})$$

en K-teoría equivariante. Con estas aplicaciones a la mano, se define para cada $\alpha \in K_{C(g)}(M^g)$ y $\beta \in K_{C(h)}(M^h)$ el producto:

$$\alpha \star \beta := (e_{gh})_* I^{C(gh)}_{C(g)\cap C(h)}(R^{C(g)}_{C(g)\cap C(h)}(e_g^*(\alpha)) \otimes R^{C(h)}_{C(g)\cap C(h)}(e_h^*(\beta)) \otimes \lambda_{-1}(B_{g,h}) \otimes \gamma_{g,h}) \tag{2.5}$$

donde $\gamma_{g,h}$ es la representación definida más abajo en la ecuación 2.7.

2.2.3. El haz de obstrucción

Dado $g \in G$, sea $X \subset M^g$ una componente conexa de M^g, considere E^X el haz normal a la inclusión de M^g en M restringido a la componente X. E^X es un haz $C(g)$-equivariante, el cual, suponiendo una métrica G-equivariante (y en particular $C(g)$-equivariante) sobre M, puede considerarse como el haz tal que:

$$E^X \oplus TM^g = R^G_{C(g)}(TM|_{M^g}).$$

Es posible descomponer E^X en términos de los autovalores de la acción de g es decir expresar E^X como la suma de espacios propios:

$$\bigoplus_{k=1}^{r-1} E_k^X,$$

donde r es el orden de g y la acción de g sobre E_k^X es multiplicar por $e^{\frac{2\pi ik}{r}}$. Considere el haz F_g tal que al restringirlo a la componente X resulta:

$$F_g|_X := \bigoplus_{k=1}^{r-1} \frac{k}{r} E_k^X.$$

Definición 2.2.1. Para $g, h \in G$ se define el haz de obstrucción $B_{g,h}$ por la fórmula:

$$B_{g,h} := TM^{g,h} \ominus R^G_{C(g)\cap C(h)}(TM|_{M^{g,h}}) \oplus R^{C(g)}_{C(g)\cap C(h)}(F_g|_{M^{g,h}}) \oplus R^{C(h)}_{C(g)\cap C(h)}(F_h|_{M^{g,h}}) \oplus R^{C(gh)}_{C(g)\cap C(h)}(F_{(gh)^{-1}}|_{M^{g,h}})$$

Nota 2.2.1. Observe que siempre se tiene la siguiente fórmula para los haces F_g, $F_{g^{-1}}$:

$$F_g \oplus F_{g^{-1}} = E^X.$$

Esto se debe a que si la acción de g sobre E_k^X es multiplicar por $e^{\frac{2\pi ik}{r}}$, la acción de g^{-1} sobre E_k^X es multiplicar por $e^{\frac{2\pi i(r-k)}{r}}$, luego:

$$F_g \oplus F_{g^{-1}} = \bigoplus_{k=1}^{r-1} \frac{k}{r} E_k^X \oplus \bigoplus_{k=1}^{r-1} \frac{r-k}{r} E_k^X = \bigoplus_{k=1}^{r-1} (\frac{k}{r} + \frac{r-k}{r}) E_k^X = \bigoplus_{k=1}^{r-1} E_k^X = E^X.$$

La relación anterior en ocasiones será más conveniente escribirla como:

$$F_g \oplus F_{g^{-1}} \oplus TM^g = R^G_{C(g)}(TM|_{M^g}). \tag{2.6}$$

2.2.4. Pushforward en K-teoría

Considere el isomorfismo de Thom equivariante:

Proposición 2.2.5 ([20], Proposicion 3.2)**.** *Sea M una G-variedad compacta y $p : E \to M$ un G-haz vectorial complejo sobre M. Exite un isomorfismo*

$$\phi : K_G^*(X) \to K_G^*(E, E \setminus E_0),$$

donde E_0 es la sección cero. La aplicación ϕ es dada vía multiplicación por la clase $\lambda_{-1}(E)$.

Ahora, se procede a definir el pushforward $f_* : K_G^*(X) \to K_G^*(Y)$ para una aplicación diferenciable $f : X \to Y$ entre G-variedades casi complejas: Sea τ el haz normal associado a la aplicación f, el pushforward associado se define como la siguiente composición

$$K_G^*(X) \xrightarrow{\phi} K_G^*(\tau, \tau \setminus \tau_0) \xrightarrow{j} K_G^*(Y, Y \setminus f(X)) \xrightarrow{i_\sharp} K_G^*(Y),$$

donde ϕ es el isomorfismo de Thom, la aplicación j esta dada por la excisión y $i_\sharp$ es el pullback inducido por la inclusión. Este pushforward puede ser extendido a K-teoría torcida

(ver [6]).
Ahora, considere el siguiente diagrama de inclusiones:

$$\begin{tikzcd} G & K \arrow[l] \\ H \arrow[u] & H\cap K \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

del cual se induce el diagrama de sobreyecciones:

$$\begin{tikzcd} G/G & G/K \arrow[l, "i_1"'] \\ G/H \arrow[u, "j_1"'] & G/(H\cap K) \arrow[l, "i_2"'] \arrow[u, "j_2"'] \end{tikzcd}$$

Usando este diagrama se obtiene:

$$j_{2*}\circ i_2^* : K_G^*(G/H) \to K_G^*(G/K)$$

$$j_{2*}\circ i_2^*([E]) = [\lambda_{-1}(\tau_{j_2}) \otimes i_2^*(p^*(E))],$$

donde τ_{j_2} es el haz normal de j_2, y la aplicación

$$i_1^*\circ j_{1*} : K_G^*(G/H) \to K_G^*(G/K)$$

$$i_1^*\circ j_{1*}([E]) = [i_1^*(\lambda_{-1}(\tau_{j_1}) \otimes i_1^*(p^*(E))].$$

Al comparar las dos aplicaciones anteriores se define una forma de *haz de exceso* dado por $\lambda_{-1}(i_1^*(\tau_{j_1})/\tau_{j_2})$). Lo anterior quiere decir que se tiene:

$$i_1^*\circ j_{1*}([E]) = j_{2*}\circ i_2^*([E]\otimes \lambda_{-1}(i_1^*(\tau_{j_1})/\tau_{j_2}))). \tag{2.7}$$

En particular cuando $H = C(g)$, $K = C(h)$ y $G = G$, para $g, h \in G$ se denota el haz de exceso como $\gamma_{g,h}$.

Fórmula equivariante de Quillen

Sean Y y Z dos sub variedades cerradas de una variedad compleja y compacta M las cuales se intersectan *limpiamente*, es decir, $W = Y \cap Z$ es una subvariedad de M y en cada punto $x \in W$, el espacio tangente de W en x es la intersección de los espacios tangentes de Y y Z en x. Sea F el *Haz de exceso* de la intersección, es decir, el haz vectorial sobre W definido como el cociente del haz tangente, de M en $x \in W$, por la suma de los haces tangentes de Y y Z en x, restringido a W.

Si M tiene una acción de un grupo de Lie compacto G, considere $i : Z \to M$ un embebimiento entre las G-variedades Z y M. La subvariedad

$$M^G = \{x \in M | gx = x \ \forall g \in G\}$$

y Z se interesectan limpiamente, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Z^G & \xrightarrow{r_Z} & Z \\ i^G \downarrow & & \downarrow i \\ M^G & \xrightarrow{r_M} & M \end{array} \tag{2.8}$$

donde r_Z y r_X son las respectivas inclusiones e i^G es la restricción de i a Z^G. Considere el pullback generado por r_Z. Como para cualquier $z \in K(Z)$, $r_Z^*(z)$ es un G-haz sobre un G-espacio trivial, por la proposición 5.3.1, se tiene que una descomposición

$$r_Z^*(z) = z_{i^G} \oplus \mu_i$$

donde μ_i es la suma de los vectores propios correspondientes a las representaciones irreductibles no triviales de G. En este caso μ_i coincide con el haz de exceso que se obtiene del diagrama de arriba.

Lema 2.2.6. *Si $z \in K(Z)$, entonces*

$$r_M^* i_*(z) = (i^G)_*(\lambda_{-1}(\mu_i) r_Z^*(z))$$

Demostración. Por el teorema 5.2.1 en el Apéndice A, se puede reemplazar M por una vecindad tubular equivariante de Z^G, luego es posible suponer que el diagrama 2.8 toma la forma:

$$\begin{array}{ccc} Z^G & \xrightarrow{r_Z} & E_1 \\ i^G \downarrow & & \downarrow i \\ E_2 & \xrightarrow{r_M} & E_1 \oplus E_2 \oplus \mu_i \end{array} \tag{2.9}$$

donde E_1 es un haz vectorial (real) equivariante sobre Z^Γ con sección cero r_Z, E_2 es una haz vectorial (complejo) equivariante con cero sección i^G y las aplicaciones r_M e i son inclusiones. Sea $i_1 : E_1 \to E_1 \oplus E_2$, $i_2 : E_2 \to E_1 \oplus E_2$ y $k : E_1 \oplus E_2 \to E_1 \oplus E_2 \oplus \mu_i$ las aplicaiones inclusión. Es posible considerar el haz vectorial $E_1 \oplus E_2 \oplus \mu_i$ como un haz vectorial sobre $E_1 \oplus E_2$, donde la aplicación k es la sección cero. Por supuesto, se tiene que $r_M^* = (ki_2)^*$ y $i_* = (ki_1)_*$, por lo cual junto con las observaciones anteriores, se obtiene que:

$$\begin{aligned} r_M^* i_*(z) &= (ki_2)^*(ki_1)_*(z) \\ &= i_2^* k^* k_* (i_1)_*(z) \\ &= i_2^*((i_1)_*(z)\lambda_{-1}(\mu_i)) \qquad (\text{ por } 5.3) \\ &= i_2^*((i_1)_*(z)) i_2^*(\lambda_{-1}(\mu_i)) \end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & M^{i,j,k} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\phi"] & & \\
 & M^{k,l} \arrow[dl, "e_k"'] \arrow[d, "e_{ij}"] \arrow[dr, "e_l"] & & M^{i,l} \arrow[dl, "e_l"'] \arrow[d, "e_{jk}"] \arrow[dr, "e_i"] & \\
M^k & M^{ij} & M^l & M^{jk} & M^i
\end{tikzcd}
$$

Por la definición de las aplicaciones inclusión y propiedades del pullback y pushforward se tiene que: $i_2^*(i_1)_*(z) = (i^G)_* r_Z^*(z)$. El último término puede ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
i_2^*((i_1)_*(z)) i_2^*(\lambda_{-1}(\mu_i)) &= (i^G)_* r_Z^*(z)(i_2^*\lambda_{-1}(\mu_i)) \\
&= i_*^G(r_Z^*(z)((i^G)^* i_2^*\lambda_{-1}(\mu_i)) \\
&= i_*^G(r_Z^*(z)\lambda_{-1}(\mu_i))
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

y así la prueba está terminada. □

Nota 2.2.2. En este momento es conveniente introducir una notación más simple para la presentación de los resultados que serán descritos en el resto de este capítulo. Sean $(g_i, g_j, g_k, g_l) \in G^4$ tales que $g_i g_j g_k g_l = 1$. Se introducen las siguientes convenciones:

- $M^{g_i} := M^i$ (análogamente para j, k, l).
- $M^{g_i} \cap M^{g_j} := M^{i,j}$ (análogamente para todas las demás combinaciones de i, j, k, l).
- $M^{g_i} \cap M^{g_j} \cap M^{g_k} := M^{i,j,k}$
- Denotamos el haz de obstrucción B_{g_i,g_j} simplemente por $B_{i,j}$ (análogamente para todas las demás combinaciones de i, j, k, l).
- $R^{C(g_i)}_{C(g_i)\cap C(g_j)} := R^i_{i,j}$ (análogamente para todas las demás combinaciones de j, k, l).
- $R^{C(g_i)}_{C(g_i)\cap C(g_j)\cap C(g_k)} := R^i_{i,j,k}$ (análogamente para todas las demás combinaciones de j, k, l).
- $R^{C(g_i g_j)}_{C(g_i g_j)\cap C(g_k)} := R^{ij}_{ij,k}$ (análogamente para todas las demás combinaciones de j, k, l).
- $I^{C(g_i)}_{C(g_i)\cap C(g_j)} := I^i_{i,j}$ (análogamente para todas las demás combinaciones de j, k, l).
- $I^{C(g_i g_j)}_{C(g_i g_j)\cap C(g_k)} := I^{ij}_{ij,k}$ (análogamente para todas las demás combinaciones de j, k, l).

El haz de exceso

El haz de exceso fue presentado en el preámbulo al lema (2.2.6) y es útil para describir algunas propiedades de los haces vectoriales que consideramos en la definición del producto $\star$. Más precisamente, es necesario estudiar algunas relaciones entre los pushforwards y pullbacks definidos sobre varias K-teorías equivariantes. Suponga un elemento $\mathbf{g} = (g_i, g_j, g_l, g_k) \in G^4$ tal que $g_i g_j g_l g_k = 1$. Primero, considere el diagrama en la parte superior de la página del cual deducimos las siguientes relaciones, válidas para todo elemento $F \in K_H(M^{ij,k})$, con H un subgrupo cerrado de G tal que $M^{ij,k}$ es una H-variedad.

$$e_{ij}^*[(e_{ij})_*(F)] = \psi_*[\phi^*(F) \otimes \lambda_{-1}(A_{i,j})] \tag{2.11}$$

donde el H-haz $A_{i,j}$ es el llamado el *haz normal de exceso*. Este haz aparece por una aplicación de la ecuación 2.10 presente en la demostración del lema (2.2.6). Cuando $H = C(g_i) \cap C(g_j) \cap C(g_k)$, y como

$$M^{ij,k}, M^{i,j} \text{ y } M^{ij,k} \cap M^{i,j} = M^{i,j,k}$$

son subvariedades de M^{ij}, para cada punto $x \in M^{i,j,k}$, el haz $TM^{i,j,k}$ en x es la intersección de las restricciones de los haces $R^{ij,k}_{i,j,k}(TM^{ij,k})$ y $R^{i,j}_{i,j,k}(TM^{i,j})$ sobre x. El haz vectorial $A_{i,j}$ es entonces el cociente del haz $R^{ij}_{i,j,k}(TM^{ij})$ por la suma de los haces $R^{ij,k}_{i,j,k}(TM^{ij,k})$ y $R^{i,j}_{i,j,k}(TM^{i,j})$ restringidos a $M^{i,j,k}$.
Por un cálculo sencillo en K-teoría, el haz $A_{i,j}$ es igual a

$$R^{ij}_{i,j,k}(TM^{ij}) \ominus R^{ij,k}_{i,j,k}(TM^{ij,k}) \ominus R^{i,j}_{i,j,k}(TM^{i,j}) \oplus TM^{i,j,k}|_{M^{i,j,k}} \in K_{C(g_i)\cap C(g_j)\cap C(g_k)}(M^{i,j,k}).$$

Este haz aparece para medir la diferencia entre la imagen vía $\hat{e}^*_{ij}(e_{ij})_*$ y vía $\psi_*\phi^*$ de un mismo $C(g_i) \cap C(g_j) \cap C(g_k)$-haz definido sobre $M^{ij,k}$.

Lema 2.2.7. *Sea $(g_i, g_j, g_k, g_l) \in G^4$ tal que $g_i g_j g_k g_l = 1$, entonces se tiene que:*

$$(A_{i,j} \oplus R^{i,j}_{i,j,k}(B_{i,j}) \oplus R^{k,l}_{i,j,k}(B_{k,l}))|_{M^{i,j,k}} = (A_{j,k} \oplus R^{j,k}_{i,j,k}(B_{j,k}) \oplus R^{l,i}_{i,j,k}(B_{l,i}))|_{M^{i,j,k}} \tag{2.12}$$

en $K_{C(g_i)\cap C(g_j)\cap C(g_k)}(M^{i,j,k})$.

Demostración. Primero note, en virtud de la ecuación (2.6), que:

$$\begin{aligned}&(R^{ij}_{i,j,k}(F_{(g_ig_j)^{-1}}) \oplus R^{kl}_{i,j,k}(F_{(g_kg_l)^{-1}}) \oplus R^{ij}_{i,j,k}(TM^{ij}))|_{M^{i,j,k}}\\ =&R^{ij}_{i,j,k}(R^G_{ij}(TM))|_{M^{i,j,k}} = R^G_{i,j,k}(TM)|_{M^{i,j,k}}\end{aligned}$$

Con lo cual el lado izquierdo de la ecuación (2.12) es igual a:

$$(TM^{i,j,k} \oplus R^i_{i,j,k}(F_{g_i}) \oplus R^j_{i,j,k}(F_{g_j}) \ominus R^G_{i,j,k}(TM) \oplus R^k_{i,j,k}(F_{g_k}) \oplus R^l_{i,j,k}(F_{g_l}))|_{M^{i,j,k}}.$$

Aplicando cálculos similares en el lado derecho de la ecuación (2.12), la identidad se tiene. $\square$

Teorema 2.2.8. *El producto $\star$ es asociativo.*

Demostración. Considere el elemento $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) \in K_{C(g_i)}(M^i) \times K_{C(g_j)}(M^j) \times K_{C(g_k)}(M^k)$. Al calcular el producto de estos tres elementos en el orden $(\alpha_i \star \alpha_j) \star \alpha_k$ y en términos de inducciones, restricciones, pullbacks y pushforwards se obtiene:

$$\begin{aligned}(\alpha_i \star \alpha_j) \star \alpha_k =& (e_l)_* \{ I^{ijk}_{ij,k}(R^{ij}_{ij,k} (e^*_{ij} \lceil (e_{ij})_* [I^{ij}_{i,j}[R^i_{i,j}(e^*_i(\alpha_i)) \otimes R^j_{i,j}(e^*_j(\alpha_j)) \otimes \lambda_{-1}(B_{i,j}) \otimes \gamma_{i,j}]] \rceil) \\ & \otimes R^k_{ij,k} (e^*_k(\alpha_k)) \otimes \lambda_{-1}(B_{ij,k}) \otimes \gamma_{ij,k}) \}\end{aligned} \tag{2.13}$$

Ahora bien, por el Lema (2.2.4) el lado izquierdo de la ecuación (2.13) se transforma en la expresión:

$$\begin{aligned}&(e_l)_* \{ I^{ijk}_{ij,k}(e^*_{ij} \left\lceil (e_{ij})_* \left[R^{ij}_{ij,k} \left(I^{ij}_{i,j}[R^i_{i,j}(e^*_i(\alpha_i)) \otimes R^j_{i,j}(e^*_j(\alpha_j)) \otimes \lambda_{-1}(B_{i,j}) \otimes \gamma_{i,j}]\right)\right]\right\rceil \\ & \otimes R^k_{ij,k} (e^*_k(\alpha_k)) \otimes \lambda_{-1}(B_{ij,k}) \otimes \gamma_{ij,k}) \}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Un $C(g_i) \cap C(g_j)$-haz V, puede ser inducido a un $C(g_i g_j)$-haz y al restringirlo al grupo $C(g_i g_j) \cap C(g_k)$ se obtiene un $C(g_i g_j) \cap C(g_k)$-haz. Pero para obtener un $C(g_i g_j) \cap C(g_k)$-haz, también es posible primero hacer la restricción de V al grupo $C(g_i) \cap C(g_j) \cap C(g_k)$ y luego inducir el haz resultante a un $C(g_i g_j) \cap C(g_k)$-haz. La diferencia estre estas dos maneras de obtener un $C(g_i g_j) \cap C(g_k)$-haz debe entonces ser un elemento que nivele las dimensiones, es decir, un elemento $\gamma \in R(C(g_i g_j) \cap C(g_k))$. Con lo cual es posible reescribir la expresión (2.14) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&(e_l)_* \{ I^{ijk}_{ij,k}(e^*_{ij} \left\lceil (e_{ij})_* \left[I^{ij,k}_{i,j,k} \left(R^{i,j}_{i,j,k}[R^i_{i,j}(e^*_i(\alpha_i)) \otimes R^j_{i,j}(e^*_j(\alpha_j)) \otimes \lambda_{-1}(B_{i,j}) \otimes \gamma_{i,j}]\right) \otimes \gamma \right]\right\rceil \\ & \otimes R^k_{ij,k} (e^*_k(\alpha_k)) \otimes \lambda_{-1}(B_{ij,k}) \otimes \gamma_{ij,k}) \} .\end{aligned} \tag{2.15}$$

Haciendo uso de las propiedades de la aplicación restricción, la anterior expresión se torna en:

$$\begin{aligned}&(e_l)_* \{ I^{ijk}_{ij,k}(I^{ij,k}_{i,j,k} \left(e^*_{ij} \left\lceil (e_{ij})_* \left[R^i_{i,j,k}(e^*_i(\alpha_i)) \otimes R^j_{i,j,k}(e^*_j(\alpha_j)) \otimes R^{i,j}_{i,j,k}(\lambda_{-1}(B_{i,j}) \otimes R^{i,j}_{i,j,k}(\gamma_{i,j}))\right]\right\rceil\right) \\ & \otimes \gamma \otimes R^k_{ij,k} (e^*_k(\alpha_k)) \otimes \lambda_{-1}(B_{ij,k}) \otimes \gamma_{ij,k}) \}\end{aligned} \tag{2.16}$$

Por otra parte, en virtud de la ecuación (2.11), la expresión (2.16) es igual a:

$$\begin{aligned}&(e_l)_* \{ I^{ijk}_{ij,k}(I^{ij,k}_{i,j,k} (\psi_* \lceil \phi^* \left[R^i_{i,j,k}(e^*_i(\alpha_i)) \otimes R^j_{i,j,k}(e^*_j(\alpha_j)) \otimes R^{i,j}_{i,j,k}(\lambda_{-1}(B_{i,j})) \otimes R^{i,j}_{i,j,k}(\gamma_{i,j})\right] \\ & \otimes \lambda_{-1}(A_{i,j}) \rceil) \otimes \gamma \otimes R^k_{ij,k} (e^*_k(\alpha_k)) \otimes \lambda_{-1}(B_{ij,k}) \otimes \gamma_{ij,k}) \} .\end{aligned} \tag{2.17}$$

Usando propiedades del pullback y del pushforward de haces, la expresión anterior es lo mismo que:

$$\begin{aligned}&(e_l\psi)_*\{\ I^{ijk}_{ij,k}(I^{ij,k}_{i,j,k}(\ R^{i}_{i,j,k}(\phi^*e^*_i(\alpha_i))\otimes R^{j}_{i,j,k}(\phi^*e^*_j(\alpha_j))\otimes R^{i,j}_{i,j,k}(\phi^*\lambda_{-1}(B_{i,j}))\otimes R^{i,j}_{i,j,k}(\gamma_{i,j})\\&\otimes\lambda_{-1}(A_{i,j})\ )\otimes\gamma\otimes R^{k}_{ij,k}\,(\psi^*e^*_k(\alpha_k))\otimes\lambda_{-1}(\psi^*B_{ij,k})\otimes\gamma_{ij,k})\ \}\end{aligned} \tag{2.18}$$

Gracias a la reciprocidad de Frobenius (Teorema 2.1) la expresión (2.18) se reescribe como:

$$\begin{aligned}&(e_l\psi)_*\{\ I^{ijk}_{ij,k}I^{ij,k}_{i,j,k}(\ R^{i}_{i,j,k}(\phi^*e^*_i(\alpha_i))\otimes R^{j}_{i,j,k}(\phi^*e^*_j(\alpha_j))\otimes R^{i,j}_{i,j,k}(\phi^*\lambda_{-1}(B_{i,j}))\otimes\lambda_{-1}(A_{i,j})\\&\otimes R^{ij}_{i,j,k}(\gamma)\otimes R^{i,j}_{i,j,k}(\gamma_{i,j})\otimes R^{k}_{i,j,k}\,(\psi^*e^*_k(\alpha_k))\otimes R^{ij,k}_{i,j,k}(\lambda_{-1}(\psi^*B_{ij,k}))\otimes R^{ij,k}_{i,j,k}(\gamma_{ij,k})\ )\ \}\end{aligned} \tag{2.19}$$

Por último, usando las propiedades de la inducción I^G_H, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}&(e_l\psi)_*\{\ I^{ijk}_{i,j,k}(\ R^{i}_{i,j,k}(\phi^*e^*_i(\alpha_i))\otimes R^{j}_{i,j,k}(\phi^*e^*_j(\alpha_j))\otimes R^{k}_{i,j,k}\,(\psi^*e^*_k(\alpha_k))\otimes R^{ij}_{i,j,k}(\gamma)\\&\otimes R^{i,j}_{i,j,k}(\gamma_{i,j})\otimes R^{ij,k}_{i,j,k}(\gamma_{ij,k})\otimes R^{i,j}_{i,j,k}(\phi^*\lambda_{-1}(B_{i,j}))\otimes\lambda_{-1}(A_{i,j})\otimes R^{ij,k}_{i,j,k}(\lambda_{-1}(\psi^*B_{ij,k}))\ )\ \}\,.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Por otro lado, considere el producto de los mismos tres elementos $\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k$ pero en de la forma $\alpha_i(\alpha_j\star\alpha_k)$. Procediendo de manera análoga a como se realizó el producto en el orden de la primera parte de la prueba, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\alpha_i\star(\alpha_j\star\alpha_k)=(e_l\delta)_*\{\ &I^{ijk}_{i,j,k}(\ R^{i}_{i,j,k}(\delta^*e^*_i(\alpha_i))\otimes R^{j}_{i,j,k}(\tau^*e^*_j(\alpha_j))\otimes R^{k}_{i,j,k}\,(\tau^*e^*_k(\alpha_k))\otimes R^{j,k}_{i,j,k}(\mu)\\&\otimes R^{jk}_{i,j,k}(\gamma_{j,k})\otimes R^{i,jk}_{i,j,k}(\gamma_{i,jk})\otimes R^{j,k}_{i,j,k}(\delta^*\lambda_{-1}(B_{j,k}))\otimes\lambda_{-1}(A_{j,k})\otimes R^{i,jk}_{i,j,k}(\lambda_{-1}(\delta^*B_{i,jk}))\ )\ \}\,,\end{aligned} \tag{2.21}$$

donde, similarmente a la primera parte, δ y τ son aplicaciones análogas a ψ y ϕ (respectivamente), y μ es análogo a γ. Por otra parte, los pullbacks topológicos que aparecen cuando se calcula el producto en cualquier orden, actuan por restricción del espacio base, lo cual hace que ambas fórmulas tengan las mismas restricciones. De la misma forma, los pushforwards $(e_l\psi)_*$ y $(e_l\delta)_*$ son equivalentes. Ahora bien, note que gracias al Lema (2.2.7) y tomando en cuenta que $B_{ij,k}=B_{k,l}$, $B_{i,jk}=B_{i,l}$, se tiene que:

$$R^{i,j}_{i,j,k}(\phi^*(B_{i,j}))\oplus A_{i,j}\oplus R^{ij,k}_{i,j,k}(\psi^*(B_{ij,k}))=R^{j,k}_{i,j,k}(\tau^*(B_{j,k}))\oplus A_{j,k}\oplus R^{i,jk}_{i,j,k}(\delta^*(B_{i,jk})). \tag{2.22}$$

Al aplicar la operación λ_{-1} em ambos lados de la ecuación (2.22) se observa que:

$$\lambda_{-1}(R^{i,j}_{i,j,k}(\phi^*(B_{i,j}))\oplus A_{i,j}\oplus R^{ij,k}_{i,j,k}(\psi^*(B_{ij,k})))=\lambda_{-1}(R^{j,k}_{i,j,k}(\tau^*(B_{j,k}))\oplus A_{j,k}\oplus R^{i,jk}_{i,j,k}(\delta^*(B_{i,jk}))) \tag{2.23}$$

Y por las propiedades de la operación λ_{-1}, se obtiene que:

$$\begin{aligned}&R^{i,j}_{i,j,k}(\lambda_{-1}(\phi^*(B_{i,j}))\otimes\lambda_{-1}(A_{i,j})\otimes R^{ij,k}_{i,j,k}(\lambda_{-1}(\psi^*(B_{ij,k})))\\=&R^{j,k}_{i,j,k}(\lambda_{-1}(\tau^*(B_{j,k}))\otimes\lambda_{-1}(A_{j,k})\otimes R^{i,jk}_{i,j,k}(\lambda_{-1}(\delta^*(B_{i,jk})))\end{aligned} \tag{2.24}$$

Para terminar, note que se debe probar la igualdad entre las representaciones

$$R^{ij}_{i,j,k}(\gamma)\otimes R^{ij}_{i,j,k}(\gamma_{i,j})\otimes R^{ij,k}_{i,j,k}(\gamma_{ij,k}) = R^{jk}_{i,j,k}(\mu)\otimes R^{jk}_{i,j,k}(\gamma_{j,k})\otimes R^{i,jk}_{i,j,k}(\gamma_{i,jk}). \tag{2.25}$$

Para ver esto considere:

$$R^{ij}_{i,j,k}(\gamma)\otimes R^{ij}_{i,j,k}(\gamma_{i,j})\otimes R^{ij,k}_{i,j,k}(\gamma_{ij,k}) = \mathbb{C}[g_1,\ldots,g_s]\otimes\mathbb{C}[h_1,\ldots,h_r]\otimes\mathbb{C}[k_1,\ldots,k_t]$$

donde $g_1,\ldots,g_s$ son los representantes de los tipos de órbita de la acción de $[C(g_i)\times C(g_j)]/(C(g_i)\cap C(g_j))$ sobre G, $h_1,\ldots,h_r$ son los representantes de los tipos de órbita de la acción de $[(C(g_ig_j)\cap C(g_k))\times(C(g_j)\cap C(g_i))]/(C(g_i)\cap C(g_j)\cap C(g_k))$ sobre $C(g_ig_j)$ y $k_1,\ldots,k_t$ son los representantes de las órbitas de la acción de $[C(g_ig_j)\times C(g_k)]/(C(g_ig_j)\cap C(g_k))$ sobre G. Tensorizar estas representaciones es equivalente a tensorizar los elementos básicos, que corresponden a los representantes. Note entonces que $g_p\otimes h_q\otimes k_v = a\otimes b$ donde (a,b) es un representante de la acción de $C(g_i)\times C(g_j)\times C(g_k)/(C(g_i)\cap C(g_j)\cap C(g_k))$ sobre el grupo $G\times G$ definida como $(g,h,k)(g_1,g_2)=(gg_1h,g_2k)$ para $(g,h,k)\in[C(g_i)\times C(g_j)\times C(g_k)]/(C(g_i)\cap C(g_j)\cap C(g_k))$, $(g_1,g_2)\in G\times G$. Luego ambas representaciones en la ecuación (2.25) son equivalentes a esta última. Con lo anterior, la demostración está terminada. □

Observe que todavía no hay una buena definición de una K-teoría para la Orbidad determinada por $[M/G]$ debido a que dados dos elementos del grupo G, g y h tales que $g=khk^{-1}$, para algún $k\in G$, las K-teorías $K_{C(h)}(M^h)$ y $K_{C(g)}(M^g)$ son isomorfas. Lo anterior dice entre otras cosas, que se repite mucha información. Observe que si $x\in M^h$, entonces $k(x)\in M^g$, luego se tiene un homeomorfismo $k: M^h\to M^g$, el cual induce con un isomorfismo determinado por la aplicación

$$k: K_{C(g)}(M^g)\to K_{kC(g)k^{-1}}(M^h)=K_{C(h)}(M^h).$$

Para obtener una estructura de K-teoría definida sobre los sectores torcidos de la Orbidad es necesario que el producto esté bien definido sobre las clases de conjugación de los elementos en G.

Considere G actuando en sí mismo por la acción conjugación de G sobre sí mismo. Denote la acción de $k\in G$ sobre $h\in G$ por h^k, entonces el estabilizador de h será el conjunto $G_h=\{k\in G|h^k=h\}=C(h)$. Observe que existen isomorfismos $c_{h,k}: K_{C(h)}(M^h)\to K_{C(h^k)}(M^{h^k})$ para cada h y cada k. Por otra parte se tiene definido un producto asociativo:

$$\star_{g,h}: K_{C(g)}(M^g)\times K_{C(h)}(M^h)\to K_{C(gh)}(M^{gh}).$$

Se define la función $c_k: PK([M/G]) := \bigoplus_{g\in G, M^g\neq\emptyset} K_{C(g)}(M^g)\to PK([M/G])$ tal que c_k es la función $c_{h,k}$ en la componente $K_{C(h)}(M^h)$. Si $\alpha\in PK([M/G])$, se puede escribir como $\alpha=\Sigma_{g\in G,M^g\neq\emptyset}\alpha_g$ con $\alpha_g\in K_{C(g)}(M^g)$. La aplicación c_k satisface que $c_e=id$, e la identidad de G, $c_k\circ c_s=c_{ks}$ para todo $k,s\in G$, $c_k\circ\star_{g,h}=\star_{c_k(g),c_k(h)}\circ(c_k\times c_k)$ para cada $g,h,k\in G$, es decir, c_k define una acción del grupo G sobre el módulo $PK([M/G])$, para la cual el producto $\star$ es G-equivariante. Se define entonces el conjunto:

$$PK([M/G])^G := \{\alpha \in PK([M/G]) | c_k(\alpha) = \alpha \text{ para todo } k \in G\}.$$

Ahora, observe que como $c_k \circ \star_{g,h} = \star_{c_k(g),c_k(h)} \circ (c_k \times c_k)$, entonces el siguiente teorema es evidente:

Teorema 2.2.9. *Sea G un grupo de Lie compacto, actuando de manera casi libre sobre una variedad casi compleja y compacta M. El conjunto $PK([M/G])^G$ con el producto inducido sobre las clases de equivalencia bajo la acción de G sobre $PK([M/G])$ es un anillo asociativo.*

De esta forma es posible definir:

$$PK([M/G])^G = K_{orb}([M/G]) = \bigoplus_{g \in \tilde{C}} K_{C(g)}(M^g) \tag{2.26}$$

Donde el producto de dos elementos $\alpha, \beta \in K_{orb}([M/G])$ es expresado en cada sumando por la fórmula:

$$(\alpha \star \beta)_g = \bigoplus_{(h,k) \in G \times G, hk=g} \alpha_h \star \beta_k \tag{2.27}$$

Ahora bien, siguiendo las ideas presentadas en [24], es posible definir un nuevo producto en el anillo $K_{orb}([M/G])$, según la fórmula:

$$(\alpha \odot \beta)_g = \bigoplus_{(h,k) \in G \times G / C(g), hk=g} \alpha_h \star \beta_k \tag{2.28}$$

Proposición 2.2.10 (Ver [24], Teorema 2.2 (ii))**.** *El producto $\odot$ es un producto asociativo.*

Considere el conjunto T_g como el conjunto de clases de equivalencia en $\{(d,e,f) \in G^3 | def = g\}$ determinado por las órbitas de la acción de $C(g)$ sobre los pares (de, f) y de $C(de)$ sobre los pares (d,e). Note que la asociatividad del producto $\star$ sobre $K_{orb}([M/G])$, induce la siguiente propiedad de asociatividad más debil:

$$\bigoplus_{(d,e,f) \in T_g} ((\alpha_d \star \beta_e) \star \rho_f) = \bigoplus_{(d,e,f) \in T_g} (\alpha_d \star (\beta_e \star \rho_f)).$$

Esta propiedad de asociatividad más debil, implica la asociatividad del produto $\odot$.

Nota 2.2.3. Cuando el grupo G es finito, el producto inducido en la ecuación (2.27), se relaciona con el producto definido en la ecuación (2.28) mediante la fórmula:

$$(\alpha \star \beta)_g = \bigoplus_{(h,k) \in G \times G, hk=g} \alpha_h \star \beta_k = \bigoplus_{(h,k) \in G \times G / C(g), hk=g} \frac{|C(g)|}{|C(h) \cap C(k)|} \alpha_h \star \beta_k,$$

es decir, los dos productos difieren en los enteros $\frac{|C(g)|}{|C(h) \cap C(k)|}$.

Sean $g_1, \ldots, g_k$ un conjunto de representantes de cada tipo de órbita de la acción de G sobre si mismo por conjugación (son finitos tipos debido al Lema (5.2.2) en el Apéndice A). Existe una manera alternativa de describir el producto $\odot$ usando el isomorfismo aditivo:

$$K_{orb}([M/G]) = PK([M/G])^G \cong \bigoplus_{i=1}^{k} K_{C(g_i)}(M^{g_i})^{C(g_i)} \tag{2.29}$$

Corolario 2.2.11 (ver [24] Corolario 2.5)**.** *Sean* $\alpha_i \in K_{C(g_i)}(M^{g_i})^{C(g_i)}$ *y* $\alpha_j \in K_{C(g_j)}(M^{g_j})^{C(g_j)}$, *entonces:*

$$(\alpha_i \odot \alpha_j)_{g_k} = \bigoplus_{x \in D} \alpha_{yg_iy^{-1}} \odot \alpha_{yxg_j(yx)^{-1}}$$

donde D *es un conjunto de representantes del doble cociente* $K \backslash G/H$ *y el elemento* y *es elegido tal que* $yg_ixg_jx^{-1}y^{-1} = g_k$.

3 K-teoría torcida

3.1. Introducción

En este capítulo se desarrollan las nociones de K-teoría torcida (por un elemento $\alpha \in H^2(G; S^1)$) para una variedad y se procede a dar una versión torcida de la K-teoría torcida (por un elemento $\omega \in H^3(G; S^1)$) para una Orbidad del tipo $[M/G]$, con M una variedad compacta casi compleja y G un grupo de Lie compacto actuando de manera casi libre sobre M. Para introducir esta sección deseo presentar el desarrollo de la teoría de representaciones proyectivas o también llamadas *torcidas*, comoun preámbulo para la noción de K-teoría torcida y debido a que muchas de las construcciones se inspiran en estos desarrollos. Como referencia para esta sección se sugiere [1].

3.2. Representaciones proyectivas

Definición 3.2.1. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Una aplicación $\rho : G \to GL(V)$ es llamada una representación proyectiva de G si existe una función $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}^*$ tal que $\rho(g)\rho(h) = \alpha(g, h)\rho(gh)$ para todo par de elementos $g, h \in G$, y además $\rho(e) = Id_V$ para e la identidad del grupo G. Se dice que dos representaciones proyectivas, $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ son linealmente equivalentes, si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $f : V_1 \to V_2$ tal que $\rho_2(g) = f\rho_1(g)f^{-1}$ para todo $g \in G$.

Note que α define un cociclo sobre G con valores en $\mathbb{C}^*$. Dada una representación proyectiva ρ del grupo G asociada a una función α, se dice que ρ es una α-representación del espacio V. Dadas dos α-representaciones ρ, τ de V, la representación $\rho + \tau$ es también una α-representación. Ahora considere dos representaciones proyectivas linealmente equivalentes ρ_1 y ρ_2 asociadas a las funciones α_1 y α_2 respectivamente. Entonces existe un isomorfismo $f : V_1 \to V_2$ tal que $\rho_2(g) = f\rho_1(g)f^{-1}$. Ahora sean $g, h \in G$. Note que se tiene que:

$$\begin{aligned}
\alpha_2(g,h)\rho_2(gh) &= \rho_2(g)\rho_2(h) = f\rho_1(g)f^{-1}f\rho_1(h)f^{-1}) \\
&= f\rho_1(g)\rho_1(h)f^{-1} = f\alpha_1(g,h)\rho_1(gh)f^{-1} = \alpha_1(g,h)f\rho_1(gh)f^{-1} \\
&= \alpha_1(g,h)\rho_2(gh)
\end{aligned}$$

con lo cual se obtiene que $\alpha_1 = \alpha_2$.

Definición 3.2.2. Considere, para α fijo, $M_\alpha(G)$ el monoide de clases de equivalencia lineales de α-representaciones. Su grupo de Grothendieck asociado, será denotado como $R_\alpha(G)$.

Ahora considere el espacio $\mathbb{C}^\alpha G$, definido como el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, con base $\{\bar{g}|g \in G\}$ y con estructura de álgebra definida por el producto $\bar{g}\bar{h} = \alpha(g,h)\overline{gh}$, extendido por linealidad. Esta álgebra será llamada el álgebra de grupo α-torcida de G. Ahora, tenemos el siguiente resultado:

Definición 3.2.3. Dados α y β dos cociclos, sus álgebras torcidas $\mathbb{C}^\alpha G$ y $\mathbb{C}^\beta G$ son isomorfas si existe un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\phi : \mathbb{C}^\alpha G \to \mathbb{C}^\beta G$ y una función $t : G \to \mathbb{C}^*$ tales que $\phi(\bar{g}) = t(g)\widetilde{g}$, donde $\{\bar{g}|g \in G\}$ y $\{\tilde{g}|g \in G\}$ son sus respectivas bases.

Proposición 3.2.1. *Dos algebras $\mathbb{C}^\alpha G$ y $\mathbb{C}^\beta G$ son isomorfas si y sólo si sus respectivos cociclos α y β son cohomologos, es decir, si definen la misma clase de equivalencia en el grupo de cohomología $H^2(G;\mathbb{C}^*)$.*

Ahora bien, se puede entonces definir una correspondencia $\alpha \mapsto \mathbb{C}^\alpha G$. Esta correspondencia, define una aplicación biyectiva del grupo $H^2(G;\mathbb{C}^*)$ en el conjunto de clases de equivalencia de algebras de grupo torcidas de G sobre $\mathbb{C}$. Este conjunto de clases de equivalencia de álgebras de grupo torcidas tiene un importante papel en la determinación de $R_\alpha(G)$ para un α fijo, debido al siguiente resultado:

Proposición 3.2.2. *Existe una biyección entre el conjunto de α-representaciones proyectivas de G y el conjunto de $\mathbb{C}^\alpha G$-modulos, de manera que preserva sumas y envía representaciones linealmente equivalentes en $\mathbb{C}^\alpha G$-módulos isomorfos.*

Definición 3.2.4. Sea α un cociclo. Un elemento $g \in G$ se llama α-regular si $\alpha(g,h) = \alpha(h,g)$ para todo h perteneciente al centralizador $C(g)$ de $g \in G$.

Note que para todo cociclo α, la identidad del grupo es un elemento α-regular, pues $\alpha(g,e)\rho(g) = \rho(g)\rho(e) = \rho(e)\rho(g) = \alpha(e,g)\rho(g)$ para todo $g \in G$, con e la identidad de G. Por otro lado observe que dado un elemento α-regular $g \in G$, y $h \in G$, $s \in C(g)$, el elemento hgh^{-1} satisface que $\alpha(hgh^{-1}, hsh^{-1}) = \alpha(hsh^{-1}, hgh^{-1})$ y como $hC(g)h^{-1} = C(hgh^{-1})$, esto muestra que hgh^{-1} es también α-regular, luego es posible hablar de clases de conjugación α-regulares.

Proposición 3.2.3. *Sea r_α el número de $\mathbb{C}^\alpha G$-módulos irreducibles, es decir, que no poseen $\mathbb{C}^\alpha G$-submódulos distintos de cero y de él mismo. El número r_α es también el número de clases de conjugación α-regulares.*

Ahora, en adelante se consideran los cociclos como elementos en $H^2(G;\mathbb{S}^1) \cong H^2(G;\mathbb{C}^*)$. Por lo anterior, a cada elemento $\alpha \in H^2(G;\mathbb{S}^1)$ le corresponde una clase de equivalencia de extensiones de grupo de la forma:

$$1 \to \mathbb{S}^1 \to \tilde{G}_\alpha \to G \to 1$$

donde el grupo $\tilde{G}_\alpha$ tiene estructura de grupo de Lie compacto, y por tanto la aplicación $\mathbb{S}^1 \to \tilde{G}_\alpha$ es una inclusión como un subgrupo cerrado. De hecho, los elementos de $\tilde{G}_\alpha$ pueden verse como:

$$\{(g,a)|g \in G, a \in \mathbb{S}^1\}$$

y su estructura de producto se define como:

$$(g_1,a_1)(g_2,a_2) = (g_1 g_2, \alpha(g_1,g_2)a_1 a_2).$$

3.3. K-teoría torcida equivariante

Considere un cociclo $\alpha \in Z^2(G;\mathbb{S}^1)$ y su respectiva extensión de grupo que representa:

$$1 \to \mathbb{S}^1 \to \tilde{G}_\alpha \to G \to 1.$$

Retomando la idea de las α-representaciones y observándolas como representaciones asociadas al grupo de Lie $\tilde{G}_\alpha$ que extiende la acción de G las cuales restringen a $\mathbb{S}^1$ como multiplicación escalar, es posible definir una versión torcida de K-teoría asociada a un G-espacio compacto X, considerando los haces vectoriales sobre X que son $\tilde{G}_\alpha$-equivariantes y que restringen a $\mathbb{S}^1$ como multiplicación en las fibras.

Definición 3.3.1. Un G-haz vectorial α-torcido sobre X es un G-haz vectorial complejo $p : E \to X$ el cual está dotado con una acción del grupo $\tilde{G}_\alpha$ que extiende la acción de G, tal que $\mathbb{S}^1$ actúa sobre las fibras por multiplicación escalar.

Ahora, note que estos α-haces vectoriales torcidos sobre X que restringen a $\mathbb{S}^1$ como multiplicación en las fibras pueden ser sumados al considerarlos como $\tilde{G}_\alpha$-haces vectoriales sobre X formando un monoide.

Definición 3.3.2. La K-teoría α-torcida G-equivariante de X, notada como ${}^{\alpha}K_G(X)$, es el grupo de Grothendieck de clases de isomorfismo de G-haces vectoriales α-torcidos sobre X que restringen a $\mathbb{S}^1$ como multiplicación en las fibras.

Este grupo puede ser considerado como el subgrupo de $K_{\tilde{G}_\alpha}(X)$ generado por clases de isomorfismo de haces que restringen a multiplicación escalar sobre $\mathbb{S}^1$. Esto es posible hacerlo debido a que dada la G-acción sobre X se tiene una $\tilde{G}_\alpha$-acción sobre X, que restringe a una acción trivial de $\mathbb{S}^1$ sobre X.

Proposición 3.3.1. *Considere α y β dos cociclos cohomólogos. Entonces existe un isomorfismo:*

$$k : {}^{\alpha}K_G(X) \to {}^{\beta}K_G(X).$$

Lema 3.3.2. *Si G actúa de manera trivial sobre un espacio compacto X, existe un isomorfismo natural:*

$$K(X) \otimes R_\alpha(G) \to {}^{\alpha}K_G(X).$$

Proposición 3.3.3. *Sea X un G-espacio compacto. Para cada cociclo $\alpha \in Z^2(G;\mathbb{S}^1)$, se tiene una descomposición:*

$$^{\alpha}K^*_G(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{(g), g \in G} (K(X^g) \otimes \mathbb{Q}(\zeta))^{C(g)}.$$

3.4. Extensión del producto fibrado a K-teoría torcida

3.4.1. Aplicación transgresión inversa

Sea $\alpha \in H^k(G;\mathbb{Z})$, cuyo representante será notado por la misma letra α en un abuso de notación. El objetivo de esta sección es definir una aplicación

$$\tau_g : H^k(G;\mathbb{Z}) \to H^{k-1}(C(g);\mathbb{Z})$$

para cada elemento $g \in G$, denominada *transgresión inversa*.Considere la acción del grupo $C(g) \times \mathbb{Z}$ sobre el espacio M^g definida por:

$$(h, n) \cdot x = xhg^n,$$

junto con el homomorfismo:

$$\phi_g : C(g) \times \mathbb{Z} \to G$$

definido por:

$$(h, n) \mapsto hg^n.$$

La inclusión $i_g : M^g \to M$ es una aplicación ϕ_g-equivariante e induce un homomorfismo

$$i_g^* : H^*_G(M;\mathbb{Z}) \to H^*_{C(g)\times\mathbb{Z}}(M^g;\mathbb{Z}).$$

Como la acción de $\mathbb{Z}$ sobre el espacio M^g es trivial, se tiene un isomorfismo:

$$H^*_{C(g)\times\mathbb{Z}}(M^g;\mathbb{Z}) \cong H^*(M^g \times_{C(g)} EC(g) \times B\mathbb{Z};\mathbb{Z})$$

y como $B\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$, usando el isomorfismo de Kunneth se obtiene que:

$$H^*_{C(g)\times\mathbb{Z}}(M^g;\mathbb{Z}) \cong H^*_{C(g)}(M^g;\mathbb{Z}) \otimes H^*(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z})$$

y por lo tanto la aplicación i_g^* se puede ver como una aplicación

$$i_g^* : H^k_G(M^g;\mathbb{Z}) \to H^k_{C(g)}(M^g;\mathbb{Z}) \oplus H^{k-1}_{C(g)}(M^g;\mathbb{Z}).$$

Tomando la proyección en el segundo sumando se define la aplicación:

$$\tau_g : H^k_G(M;\mathbb{Z}) \to H^{k-1}_{C(g)}(M^g;\mathbb{Z}) \tag{3.1}$$

llamada la *transgresión inversa* sobre el elemento $g \in G$.

Nota 3.4.1.
- Observe que si $M = \{*\}$ es la variedad con un sólo punto, entonces $H^k_G(\{*\};\mathbb{Z}) \cong H^k(G;\mathbb{Z})$ con lo cual el elemento α puede verse como un elemento en la cohomología del grupo G. Ahora bien, si se considera la aplicación transgresión inversa para este caso particular, resulta en un morfismo
$$\tau_g : H^k(G;\mathbb{Z}) \to H^{k-1}(C(g);\mathbb{Z}).$$
- Por otro lado considerando la sucesión exacta corta:
$$1 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \to 1$$
e induciendo la sucesión exacta larga en coeficientes:
$$\cdots \to H^k_G(X;\mathbb{Z}) \to H^k_G(X;\mathbb{C}) \to H^k_G(X;\mathbb{C}^*) \to H^{k+1}_G(X;\mathbb{Z}) \to \cdots$$
se tiene que $H^k_G(X;\mathbb{S}^1) \cong H^k_G(X;\mathbb{C}^*) \cong H^{k+1}_G(X;\mathbb{Z})$, debido a que $H^k_G(X;\mathbb{C}) \cong 0$ para $k > 1$.

3.5. Construcción del producto fibrado en K-teoría torcida

Considere los siguientes hechos generales para cualquier par de grupos G, G' y cualquier aplicación continua entre espacios topológicos $f : X \to Y$, tal que $fh = hf$. Dado un homomorfismo de grupos $h : G \to G'$ y dados X un G-espacio, Y un G'-espacio. Considere una clase $\alpha \in H^2(G';\mathbb{S}^1)$ (con representante α por abuso de notación), se puede inducir una aplicación:

$$^{\alpha}f^* : {}^{\alpha}K_{G'}(Y) \to {}^{h^*(\alpha)}K_G(X), \tag{3.2}$$

construida de la siguiente forma. Note que si Y es un G'-espacio es posible darle estructura de G-espacio usando la aplicación $h : G \to G'$, definiendo la acción como $g(y) = h(g)y$ para cada $g \in G$. Ahora, el morfismo h induce una función $h^* : H^2(G';\mathbb{S}^1) \to H^2(G;\mathbb{S}^1)$, la cual induce a su vez un morfismo de ${}^{\alpha}K_{G'}(Y)$ en ${}^{h^*(\alpha)}K_G(Y)$. Por otra parte, la aplicación f induce un pullback $f^* : {}^{h^*(\alpha)}K_G(Y) \to {}^{h^*(\alpha)}K_G(X)$. Al componer estos dos morfismos obtenemos la aplicación ${}^{\alpha}f^*$ en 3.2.

Nota 3.5.1. En particular, cuando H es un subgrupo de G, el homomorfismo inclusión define una aplicación $Res^G_H : H^2(G;\mathbb{S}^1) \to H^2(H;\mathbb{S}^1)$ y dados Y un G-espacio, X un H-espacio, se tiene para cada $\alpha \in H^2(H;\mathbb{S}^1)$ y cada aplicación $f : X \to Y$ una aplicación restricción

$${}^{\alpha}f^* : {}^{\alpha}K_G(Y) \to {}^{Res^G_H(\alpha)}K_H(X).$$

Como caso particular note que si $X \subset Y$ y f es la aplicación inclusión $i : X \to Y$, la función definida en 3.2 resulta en una aplicación

$${}^{\alpha}i^* : {}^{\alpha}K_G(Y) \to {}^{Res^G_H(\alpha)}K_H(X).$$

3.5.1. Producto en el caso torcido

Sea $\alpha \in H^3(G;\mathbb{Z})$, cuyo representante será notado por la misma letra α en un abuso de notación. Sea G un grupo finito, actuando sobre una variedad casi compleja M de forma tal que la acción es casi libre. Considere el módulo:

$$^{\alpha}K_{str}([M/G]) := \bigoplus_{g\in\tilde{C}} {}^{\alpha_g}K_{C(g)}(M^g), \tag{3.3}$$

donde M^g denota el conjunto de puntos fijos de g, el grupo $C(g)$ es el centralizador del elemento g y $\alpha_g \in H^2(C(g);\mathbb{Z})$ denota la aplicación transgresión inversa del elemento α. El objetivo de esta sección es definir un producto asociativo que convierta el módulo 3.3 en un anillo. Para comenzar, considere las aplicaciones inclusión de grupos

$$i_g : C(g)\cap C(h) \to C(g),$$

$$i_h : C(g)\cap C(h) \to C(h)$$

y

$$i_{gh} : C(g)\cap C(h) \to C(gh)$$

para $g,h\in G$. Estas aplicaciones inducen las aplicaciones restricción:

$$i_g^* : H^2(C(g);\mathbb{S}^1) \to H^2(C(g)\cap C(h);\mathbb{S}^1),$$

$$i_h^* : H^2(C(h);\mathbb{S}^1) \to H^2(C(g)\cap C(h);\mathbb{S}^1).$$

El morfismo i_{gh} induce una aplicación $(i_{gh})_* : H^2(C(g)\cap C(h);\mathbb{S}^1) \to H^2(C(g);\mathbb{S}^1)$, la cual es el morfismo inducción en cohomología de grupos.
Dado $E \in {}^{\alpha_g}K_{C(g)}(X^g)$, este haz puede verse como un haz $C(g)_{\alpha_g}$-equivariante que restringe a multiplicación en las fibras sobre $\mathbb{S}^1$, luego para la inclusión i_g y s la identidad en $\mathbb{S}^1$,se induce un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathbb{S}^1 & \to & C(g)_{\alpha_g} & \to & C(g) & \to & 1 \\ & & \uparrow s & & \uparrow (s,i_g) & & \uparrow i_g & & \\ 1 & \to & \mathbb{S}^1 & \to & (C(g)\cap C(h))_{i_g^*(\alpha_g)} & \to & C(g)\cap C(h) & \to & 1 \end{array} \tag{3.4}$$

mediante el cual todo haz $C(g)_{\alpha_g}$-equivariante restringe a un haz $(C(g)\cap C(h))_{i_g^*(\alpha_g)}$-equivariante, el cual puede ser notado como $i_g^*(E)$. Entonces para cada $(E,F) \in {}^{\alpha_g}K_{C(g)}(M^g)\times {}^{\alpha_h}K_{C(h)}(M^h)$, se tiene la aplicación:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha_g}K_{C(g)}(M^g) \times {}^{\alpha_h}K_{C(h)}(M^h) &\to {}^{i_g^*(\alpha_g)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^g) \times {}^{i_h^*(\alpha_h)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^h) \\ (E,F) &\mapsto (i_g^*(E), i_h^*(F)) \end{aligned}$$

Por otra parte, en virtud de las inclusiones de espacios $e_g : M^{g,h} \to M^g$, $e_h : M^{g,h} \to M^h$ inducen aplicaciones pullback de haces vectoriales:

$$\begin{gathered} {}^{i_g^*(\alpha_g)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^g) \times {}^{i_h^*(\alpha_h)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^h) \to {}^{i_g^*(\alpha_g)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^{g,h}) \times {}^{i_h^*(\alpha_h)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^{g,h}) \\ (A,B) \mapsto (e_g^*(A), e_h^*(B)) \end{gathered}$$

Ahora, dadas las extensiones centrales:

$$1 \to \mathbb{S}^1 \to (C(g)\cap C(h))_{i_g^*(\alpha_g)} \to C(g)\cap C(h) \to 1,$$

$$1 \to \mathbb{S}^1 \to (C(g)\cap C(h))_{i_h^*(\alpha_h)} \to C(g)\cap C(h) \to 1$$

inducidas por $i_g^*(\alpha), i_h^*(\alpha) \in H^2(C(g)\cap C(h);\mathbb{S}^1))$ respectivamente, se tiene la extensión central:

$$1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to (C(g)\cap C(h))_{i_g^*(\alpha_g)} \times (C(g)\cap C(h))_{i_h^*(\alpha_h)} \to C(g)\cap C(h) \times C(g)\cap C(h) \to 1.$$

Dados dos haces $E \in {}^{i_g^*(\alpha_g)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^{g,h})$ y $F \in {}^{i_h^*(\alpha_h)}K_{C(h)\cap C(h)}(M^{g,h})$, el producto tensorial $E \otimes F$ es naturalmente un $(C(g)\cap C(h))_{i_g^*(\alpha_g)} \times (C(g)\cap C(h))_{i_h^*(\alpha_h)}$-haz que restringe a multiplicación en las fibras en $\mathbb{S}^1$. Restringiendo la acción a la diagonal $\Delta(C(g)\cap C(h)) \subset C(g)\cap C(h) \times C(g)\cap C(h)$, se obtiene una extensión central de la forma:

$$1 \to \mathbb{S}^1 \to (C(g)\cap C(h))_{i_g^*(\alpha_g)i_h^*(\alpha_h)} \to \Delta(C(g)\cap C(h)) \to 1$$

la cual corresponde al elemento $i_g^*(\alpha_g)i_h^*(\alpha_h) \in H^2(C(g)\cap C(h);\mathbb{S}^1)$. Con lo anterior, se tiene una aplicación:

$$\begin{gathered} {}^{i_g^*(\alpha_g)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^{g,h}) \times {}^{i_h^*(\alpha_h)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^{g,h}) \to {}^{i_g^*(\alpha_g)i_h^*(\alpha_h)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^{g,h}) \\ (E,F) \mapsto E \otimes F. \end{gathered}$$

Ahora bien, notando que $i_g^*(\alpha_g)i_h^*(\alpha_h) = i_{gh}^*(\alpha_{gh})$ en $H^2(C(g)\cap C(h);\mathbb{S}^1)$ (son cociclos cohomólogos), entonces se tiene que:

$${}^{i_g^*(\alpha_g)i_h^*(\alpha_h)}K_{C(g)\cap C(h)}(M^{g,h}) \cong {}^{i_{gh}^*(\alpha_{gh})}K_{C(g)\cap C(h)}(M^{g,h}),$$

con lo cual es posible hacer la inducción

$$\begin{gathered} {}^{i_{gh}^*(\alpha_{gh})}K_{C(g)\cap C(h)}(M^{g,h}) \to {}^{(i_{gh})_* i_{gh}^*(\alpha_{gh})}K_{C(gh)}(M^{g,h}) \\ A \mapsto Ind(A). \end{gathered}$$

Por último, se considera el pushforward topológico inducido por la aplicación $e_{gh} : M^{g,h} \to M^{gh}$ para obtener un morfismo:

$$\begin{aligned} {}^{(i_{gh})_* i^*_{gh}(\alpha_{gh})}K_{C(gh)}(M^{g,h}) &\to {}^{(i_{gh})_* i^*_{gh}(\alpha_{gh})}K_{C(gh)}(M^{gh}) \\ E &\mapsto (e_{gh})_*(E). \end{aligned}$$

Con la discusión previa, es posible entonces definir un producto sobre el módulo 3.3 definido por la composición de los morfismos previamente descritos, para obtener el producto:

$$K^{\alpha_g}_{C(g)}(M^g) \times K^{\alpha_h}_{C(h)}(M^h) \to K^{\alpha_{gh}}_{C(gh)}(M^{gh}) \tag{3.5}$$

definido por:

$$(E, F) \mapsto E \star_\alpha F := (e_{gh})_*(Ind(e^*_g i^*_g(E) \otimes e^*_h i^*_h(F) \otimes \lambda_{-1}(B_{g,h}))) \otimes \gamma_{g,h}.$$

Es posible describir el anterior producto en términos de restricciones análogas a como se definió el producto $\star$ en el capítulo anterior:

$$E \star_{alpha} F = (e_{gh})_*({}^{\alpha_{gh}}I^{gh}_{g,h}(e^{*\alpha_g}_g R^g_{g,h}(E) \otimes e^{*\alpha_h}_h R^h_{g,h}(F) \otimes \lambda_{-1}(B_{g,h}))) \otimes \gamma_{g,h} \tag{3.6}$$

con lo cual se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3.5.1. *El producto $E \star_\alpha F$ es asociativo.*

La demostración se induce directamente de la asociatividad del producto $\star$, debido a que los haces que generan la K-teoría torcida Orbidad pueden considerarse como haces de las K-teorías equivariantes sobre los grupos G_α, los cuales restringen a multiplicación en las fibras sobre $\mathbb{S}^1$. Ahora bien, usando los resultados de [5] es posible obtener una formula de descomposición para la K-teoría torcida. Sea $z \in C(g)$, para $g \in G$. Considere el siguiente conmutador:

$$\begin{aligned} (z,1)(g,1)(z^{-1},1)(g^{-1},1) &= (zg, \alpha(z,g))(z^{-1}g^{-1}, \alpha(z^{-1}, g^{-1})) \\ &= (zg(gz)^{-1}, \alpha(zg,(zg)^{-1})\alpha(z,g)\alpha(g,z)^{-1})) \\ &= (e, \alpha(z,g)\alpha(g,z)^{-1}). \end{aligned}$$

Según lo anterior, se puede definir una aplicación $\tau^\alpha_g : C(g) \to \mathbb{S}^1$ por la fórmula $\tau^\alpha_g(z) = \alpha(z,g)\alpha(g,z)^{-1}$, la cual es trivial si y sólo si $g \in G$ es un elemento α-regular.

Nota 3.5.2. Observe que en el cálculo anterior se supone que $\alpha(zg,(zg)^{-1}) = 1$. Esta es una propiedad de los cociclos llamados standard, los cuales satisfacen que para todo $g \in G$, $\alpha(g, g^{-1}) = 1$. Siempre es posible suponer que para cada clase en $H^2(G; \mathbb{S}^1)$, existe un cociclo standard que la representa. En adelante asumiré este hecho.

Dejando por un momento la aplicación τ_g definida antes para considerar una representación lineal del grupo $\tilde{G}_\alpha$, es decir, un homomorfismo $\psi : \tilde{G}_\alpha \to GL(V)$. Esta representación lineal define una α-representación de G usando la fórmula: $\rho(g) := \psi(g, 1)$. Note que para $g, h \in G$,

$$\rho(g)\rho(h) = \psi(g,1)\psi(h,1) = \psi((g,1)(h,1)) = \psi(gh, \alpha(g,h)) = \alpha(g,h)\psi(gh,1) = \alpha(g,h)\rho(gh).$$

Lo anterior, asumiendo que la representación ψ restringe a multiplicación escalar en el subgrupo $\mathbb{S}^1$. De la misma forma, dada una α-represntación ρ es posible definir una representación lineal de $\tilde{G}_\alpha$. Considerando $\psi(g, a) = a\rho(g)$, observe que:

$$\psi((g,a)(h,b)) = \psi(gh, \alpha(g,h)ab) = \alpha(g,h)ab\rho(g,h) = ab\rho(g)\rho(h) = \psi(g,a)\psi(h,b),$$

para $g, h \in G$ y $a, b \in \mathbb{S}^1$. Es decir se tiene una biyección entre $R_\alpha(G)$ y el subgrupo de $R(\tilde{G}_\alpha)$ generado por las representaciones que restringen a multiplicación escalar en el subgrupo $\mathbb{S}^1$. Considere el caso particular en que $g \in G$ es un elemento tal que $g^n = e$, e la identidad del grupo G. Considere $\langle g \rangle$ el subgrupo ciclico generado por g, $\tilde{\langle g \rangle}_\alpha$ la correspondiente extensión de grupo para un cociclo α y tome ϕ una representación del grupo $\tilde{\langle g \rangle}_\alpha$. Para cualquier elemento $(x, b) \in \tilde{\langle g \rangle}_\alpha$ se define una aplicación para cada $(z, a) \in \tilde{C(g)}_\alpha$ por la fórmula:

$$(z,a)\phi(x,b) = \phi((z,a)(x,b)(z,a)^{-1}).$$

Note que esta aplicación satisface:

$$\begin{aligned}
(z,a)\phi(x,b) &= \phi((z,a)(x,b)(z,a)^{-1}) \\
&= \phi((z,a)(x,b)(z,a)^{-1}(x,b)^{-1}(x,b)) \\
&= \phi((z,a)(x,b)[(x,b)(z,a)]^{-1}(x,b)) \\
&= \phi((e, \alpha(z,x)\alpha(x,z)^{-1})(x,b)) \\
&= \phi(x, \alpha(z,x)\alpha(x,z)^{-1}b) \\
&= \alpha(z,x)\alpha(x,z)^{-1}\phi(x,b)
\end{aligned}$$

Este valor es precisamente $\tau_x^\alpha(z)\phi(x,b)$, de lo cual se tiene una acción del grupo $\tilde{C(g)}_\alpha$ sobre el subanillo de las representaciones en $R(\tilde{\langle g \rangle}_\alpha)$ que restringen a multiplicación por escalar en $\mathbb{S}^1$, es decir en $R_{Res(\alpha)}(\langle g \rangle)$, donde $Res(\alpha)$ es la imagen de α por la aplicación

$$i^* : H^2(G; \mathbb{S}^1) \to H^2(\langle g \rangle; \mathbb{S}^1)$$

inducida por la inclusión $i : \langle g \rangle \to G$. Ahora note que para cualquier $(x, b), (y, c) \in \tilde{\langle g \rangle}_\alpha$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
(z,a)\phi((x,b)(y,c)) &= (z,a)\phi(xy, bc\alpha(x,y)^{-1})\\
&= \tau^{\alpha}_{xy}\phi(xy, bc\alpha(x,y)^{-1})\\
&= \phi((z,a)(x,b)(y,c)(z,a)^{-1})\\
&= \phi((z,a)(x,b)(z,a)^{-1}(z,a)(y,c)(z,a)^{-1})\\
&= \phi((z,a)(x,b)(z,a)^{-1})\phi((z,a)(y,c)(z,a)^{-1})\\
&= \tau^{\alpha}_{x}\phi(x,b)\tau^{\alpha}_{y}\phi(y,c)\\
&= \tau^{\alpha}_{x}\tau^{\alpha}_{y}\phi((x,b)(y,c))\\
&= \tau^{\alpha}_{x}\tau^{\alpha}_{y}\phi((xy, bc\alpha(x,y)^{-1})
\end{aligned}
$$

con lo cual la aplicación $x \mapsto \tau^{\alpha}_{x}(z)$ define un homomorfismo. Ahora bien, como $H^2(\langle g\rangle;\mathbb{S}^1) = 0$, la clase $Res(\alpha)$ es cohomóloga a cero, debe tenerse que $R_{Res(\alpha)}(\langle g\rangle) \cong R(\langle g\rangle)$. El isomorfismo puede darse explicitamente considerando que una $Res(\alpha)$-representación de $\langle g\rangle$ está dada por una aplicación $\phi : \langle g\rangle \to GL(V)$ tal que $\phi(x)\phi(y) = Res(\alpha)(x,y)\phi(xy)$, para $x, y \in \langle g\rangle$. Como $Res(\alpha)$ es cohomóloga a cero, debe existir una aplicación $\gamma : \langle g\rangle \to \mathbb{S}^1$ tal que $Res(\alpha)(x,y) = \gamma(x)^{-1}\gamma(yx)\gamma(y)^{-1}$, con lo cual se tiene que

$$\phi(x)\phi(y) = Res(\alpha)(x,y)\phi(xy) = \gamma(x)^{-1}\gamma(yx)\gamma(y)^{-1}\phi(xy)$$

de donde se induce que $\gamma(x)\phi(x)\gamma(y)\phi(y) = \gamma(xy)\phi(xy)$, con lo cual $\gamma\phi$ es una representación de $\langle g\rangle$. Lo anterior define el isomorfismo: $A_{\alpha,g} : R_{Res(\alpha)}(\langle g\rangle) \to R(\langle g\rangle)$ tal que $\phi \mapsto \gamma\phi$.
Por otra parte, tome ζ una raíz n-ésima de la unidad. Se define la aplicación $\chi_g : R(\langle g\rangle) \to \mathbb{Q}(\zeta)$ definida como $\chi_g(\phi) = traza(\phi(g))$. Con esta aplicación y el isomorfismo $A_{\alpha,g}$, se puede dotar al anillo $R(\langle g\rangle)$ y al cuerpo $\mathbb{Q}(\zeta)$ de una $C(g)$-acción. La $C(g)$-acción en el cuerpo $\mathbb{Q}(\zeta)$ es dada como multiplicación por $\tau^{\alpha}_{g}(z)$, para $z \in C(g)$, es decir, $z(p(\zeta)) = \tau^{\alpha}_{g}(z)p(\zeta)$. Note que las aplicaciones $A_{\alpha,g}$ y χ_g son $C(g)$-equivariantes.

Lema 3.5.2. *Sean $\beta_1, \beta_2 : C(h) \times C(h) \to \mathbb{S}^1$ dos elementos en $Z^2(C(h);\mathbb{S}^1)$. El siguiente diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
R_{Res(\beta_1)}(\langle g\rangle) \times R_{Res(\beta_2)}(\langle g\rangle) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "A_{\beta_1,g}\times A_{\beta_2,g}"'] & R_{Res(\beta_1\beta_2)}(\langle g\rangle) \arrow[d, "A_{\beta_1\beta_2,g}"] \\
R(\langle g\rangle)_{\beta_1} \times R(\langle g\rangle)_{\beta_2} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\chi_g\times\chi_g"'] & R(\langle g\rangle)_{\beta_1\beta_2} \arrow[d, "\chi_g"] \\
\mathbb{Q}(\zeta)_{\beta_1} \times \mathbb{Q}(\zeta)_{\beta_2} \arrow[r, "\cdot"] & \mathbb{Q}(\zeta)_{\beta_1\beta_2}
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo y además $C(h)$-equivariante. El símbolo $\langle g\rangle$ denota el subgrupo de $C(h)$ generado por $g \in C(h)$.

Demostración. Sea $\psi_i : \langle g\rangle \to Aut(V_i)$ un elemento en $R_{Res(\beta_i)}(\langle g\rangle)$. Como $H^2(\langle g\rangle;\mathbb{S}^1)$ es trivial, existe $\gamma_i : C(h) \to \mathbb{S}^1$, una función tal que $\delta\gamma_i = \beta_i$. Se tiene entonces que $A_{\beta_i,g}(\psi_i) = \gamma_i\psi_i$ y por tanto

$$A_{\beta_1,g}(\psi_1) \otimes A_{\beta_2,g}(\psi_2) = \gamma_1\psi_1 \otimes \gamma_2\psi_2 = \gamma_1\gamma_2(\psi_1 \otimes \psi_2) = A_{\beta_1\beta_2,g}(\psi_1 \otimes \psi_2)$$

donde la última ecuación se sigue de que:

$$\delta(\gamma_1\gamma_2) = \beta_1\beta_2.$$

La conmutatividad del segundo diagrama viene de la propiedad:

$$\text{traza}(A \otimes B) = \text{traza}(A)\text{traza}(B).$$

Ahora, para cada $k \in C(h)$ se tiene que:

$$(k \cdot \rho_1) \otimes (k \cdot \rho_2) = \tau_g\beta_1(k)\rho_1 \otimes \tau_g\beta_2(k)\rho_2$$

Como la aplicación τ_g es un homomorfismo de grupos, lo anterior es igual a:

$$\tau_g\beta_1\beta_2(k)\rho_1 \otimes \rho_2 = k \cdot (\rho_1 \otimes \rho_2)$$

. □

Sea X un $C(h)$-variedad compacta y sea $\beta : C(h) \times C(h) \to \mathbb{S}^1$ un elemento en $Z^2(C(h);\mathbb{S}^1)$. Como antes, sea X^g el conjunto de puntos fijos de $g \in C(h)$. Considere los siguientes homomorfismos:

$${}^{\beta}K_{C(h)}(X) \to {}^{Res(\beta)}K_{\langle g\rangle}(X^g) \xrightarrow{\cong} K(X^g) \otimes R_{Res(\beta)}(\langle g\rangle) \to K(X^g) \otimes \mathbb{Q}(\zeta)_{\beta},$$

donde el el primer morfismo es el inducido por la restricción de la clase β al subgrupo de $C(h)$ generado por el elemento $g \in C(h)$, el segundo es el isomorfismo natural debido a la acción trivial de $\langle g\rangle$ sobre X^g y el último es la composición con $\chi_g \circ A_{\beta,g}$. La composición de estos morfismos tiene imagen en los invariantes bajo la acción del grupo $C(h)$. Lo anterior, nos lleva al siguiente resultado:

Teorema 3.5.3 (Descomposición para K-teoría torcida)**.** *Sea X un $C(h)$-CW complejo finito, sea $C(h)$ un grupo de Lie compacto y $\beta : C(h) \times C(h) \to \mathbb{S}^1$ un elemento en $Z^2(C(h);\mathbb{S}^1))$. Sea T un subconjunto de $C(h)$ tal que cada elemento de T representa una clase en $\tilde{C} = \{(g) \subset C(h) | X^g \neq \emptyset\}$. Entonces, se tiene una descomposición:*

$${}^{\beta}K_{C(h)}(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \prod_{g \in T} \left(K(X^g) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{|g|})_{\beta}\right)^{C(h)}$$

donde $\zeta_{|g|}$ es una raíz $|g|$-ésima de la unidad, $|g|$ es el orden del elemento g.

En virtud del lemma (3.5.2) se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.5.4. *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
{}^{\beta_1}K_{C(h)}(X) \times {}^{\beta_2}K_{C(h)}(X) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d] & {}^{\beta_1\beta_2}K_{C(h)}(X) \arrow[d] \\
\big(K(X^g)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{|g|})_{\beta_1}\big)^{C(h)} \times \big(K(X^g)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{|g|})_{\beta_2}\big)^{C(h)} \arrow[r] & \big(K(X^g)\otimes\mathbb{Q}(\zeta_{|g|})_{\beta_1\beta_2}\big)^{C(h)}
\end{tikzcd}$$

donde la aplicación en la línea inferior envía el par $(E_1 \otimes p_1(\zeta), E_2 \otimes p_2(\zeta))$ *al elemento* $(E_1 \otimes E_2) \otimes (p_1(\zeta)p_2(\zeta))$.

El anterior teorema exhibe la manera en que el producto $\star_\alpha$ se relaciona con la fórmula de descomposición del Teorema (3.5.3) y cómo esta fórmula puede ser utilizada el cálculo de la K-teoría torcida. Note que si se toma $X = M^h$, entonces la fórmula de descomposición del Teorema (3.5.3) puede ser utilizada para obtener:

$$ {}^{\alpha_h}K_{C(h)}(M^h) \otimes \mathbb{Q} \cong \prod_{g\in T} \big(K(M^{g,h}) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{|h|})_{g,\alpha_h}\big)^{C(h)} \tag{3.7}$$

donde la acción de $C(h)$ sobre $\mathbb{Q}(\zeta_{|h|})_{g,\alpha_h}$ es multiplicar por la doble transgressión inversa $\tau_g(\tau_h(\alpha)) = \tau_g(\alpha_h)$.

Ejemplo 6. En este ejemplo se va a calcular la transgresión inversa para el grupo $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n = (\mathbb{Z}_p)^n$, con p un número primo diferente de 2. Considere las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathbb{Z} & \overset{\times p}{\to} & \mathbb{Z} & \overset{\pi}{\to} & \mathbb{Z}_p & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Z}_p & \overset{\times p}{\to} & \mathbb{Z}_{p^2} & \overset{\tau}{\to} & \mathbb{Z}_p & \to & 0
\end{array} \tag{3.8}$$

donde las aplicaciones π y τ son las proyecciones naturales. Las flechas hacia abajo también son proyecciones. Estas dos sucesiones exactas en el diagrama de arriba inducen sucesiones exactas largas de coeficientes:

$$\cdots \to H^{k-1}(BG;\mathbb{Z}_p) \overset{\partial}{\to} H^k(BG;\mathbb{Z}) \overset{(\times p)_*}{\to} H^k(BG;\mathbb{Z}) \overset{(\pi)_*}{\to} H^k(BG;\mathbb{Z}_p) \overset{\partial}{\to} H^{k+1}(BG;\mathbb{Z}) \to \cdots \tag{3.9}$$

y

$$\cdots \to H^{k-1}(BG;\mathbb{Z}_p) \overset{\beta}{\to} H^k(BG;\mathbb{Z}_p) \overset{(\times p)_*}{\to} H^k(BG;\mathbb{Z}_{p^2}) \overset{(\tau)_*}{\to} H^k(BG;\mathbb{Z}_p) \overset{\beta}{\to} H^{k+1}(BG;\mathbb{Z}_p) \to \cdots \tag{3.10}$$

El grupo $H^k(BG; \_)$ es un p-grupo siempre que G sea un p-grupo, luego los morfismos $(\times p)_*$ en las sucesiones exactas largas 3.9 y 3.10 son la aplicaciones cero. De allí que π_* y τ_* son morfismos inyectivos y por tanto $H^k(BG;\mathbb{Z}) \cong H^k(BG;\mathbb{Z}_{p^2})$. Por otro lado, por la exactitud de la sucesión 3.10, $H^k(BG;\mathbb{Z}_{p^2}) \cong Ker(\beta : H^k(BG;\mathbb{Z}_p) \to H^{k+1}(BG;\mathbb{Z}_p))$, es decir,

$$H^k(BG;\mathbb{Z}) \cong Ker(\beta : H^k(BG;\mathbb{Z}_p) \to H^{k+1}(BG;\mathbb{Z}_p)).$$

Cálculo de la transgresión inversa

Por definición, la transgresión inversa τ_g es una aplicación definida entre los grupos $H^k(BG;\mathbb{Z})$ y $H^{k-1}(BC_G(g);\mathbb{Z})$. Como el grupo G es abeliano, se tiene que la trangresión inversas puede factorizarse como la composición de aplicaciones:

$$\tilde{\tau}_g : Ker(\beta : H^k(BG;\mathbb{Z}_p) \to H^{k+1}(BG;\mathbb{Z}_p)) \to Ker(\beta : H^{k-1}(BG;\mathbb{Z}_p) \to H^k(BG;\mathbb{Z}_p)).$$

Ahora, considere el anillo de cohomología de grupo $H^*(BG;\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x_1,\ldots,x_n]\otimes\Lambda[y_1,\ldots,y_n]$ donde los grados son $|x_i| = 2$ y $|y_i| = 1$ para cada $i = 1,\ldots,n$, $\mathbb{F}_p$ es el cuerpo con p elementos. En virtud de los cálculos efectuados, se debe hallar un polinomio $q(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{F}_p[x_1,\ldots,x_n] \otimes \Lambda[y_1,\ldots,y_n]$ de grado k, tal que $\beta(q) = 0$ y $\tilde{\tau}_g(q) \neq 0$ para algún $g \in G$.

Nota 3.5.3. El morfismo de conexión β de la sucesión exacta larga 3.10 se llama la aplicación de Bockstein. Este morfismo induce una aplicación $\beta : H^*(BG;\mathbb{Z}_p) \to H^*(BG;\mathbb{Z}_p)$ la cual tiene la propiedad multiplicativa:

$$\beta(x_iy_j) = \beta(x_i)y_j + (-1)^{deg(x_i)}x_i\beta(y_j).$$

Por otro lado los elementos x_i son elegidos tales que $\beta(y_i) = x_i$.

Para hallar un tal polinomio, se procede a calcular la transgresión inversa. Tome un elemento $g = (a_1,\ldots,a_n) \in G$ y considere la aplicación:

$$G \times \mathbb{Z} \to G \times \langle g\rangle \to G$$

donde

$$(h,m) \mapsto (h,g^m) \mapsto hg^m.$$

En cohomología se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(BG;\mathbb{F}_p) & \to & H^*(BG\times B(\mathbb{Z}_p);\mathbb{F}_p) & \to & H^*(BG\times B\mathbb{Z};\mathbb{F}_p) \\ x_i & \mapsto & x_i + a_iw & \mapsto & x_i + a_i \\ y_i & \mapsto & y_i + a_iz & \mapsto & y_i + a_iz \end{array} \tag{3.11}$$

donde

$$H^*(BG\times B(\mathbb{Z}_p);\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[x_1,\ldots,x_n,w] \otimes \Lambda[y_1,\ldots,y_n,z]$$

y

$$H^*(BG\times B\mathbb{Z};\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[x_1,\ldots,x_n] \otimes \Lambda[y_1,\ldots,y_n,z].$$

Así, para los productos $x_iy_j, x_ix_j, y_iy_j \in H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ se obtiene el cálculo de la transgresión inversa:

$$\begin{aligned}(x_iy_j) &\mapsto (x_i + a_iw)(y_j + a_iz) = x_iy_j + x_ia_jz + a_iwy_j + a_ia_jwz \quad &&\text{en } H^*(BG\times B(\mathbb{Z}_p);\mathbb{F}_p)\\ &\mapsto x_iy_j + x_ia_jz &&\text{en } H^*(BG\times B\mathbb{Z};\mathbb{F}_p).\end{aligned} \tag{3.12}$$

De la definición 3.1 se tiene que $\tilde{\tau}_g(x_i y_j) = x_i a_j$.

$$\begin{aligned}(x_i x_j) &\mapsto (x_i + a_i w)(x_j + a_i w) = x_i x_j + x_i a_j w + a_i w x_j \quad &\text{en } H^*(BG \times B(\mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p)\\ &\mapsto x_i x_j &\text{en } H^*(BG \times B\mathbb{Z}; \mathbb{F}_p).\end{aligned} \tag{3.13}$$

y entonces se obtiene $\tilde{\tau}_g(x_i x_j) = 0$. Por último, para el producto $(y_i y_j)$ la transgresión inversa es:

$$\begin{aligned}(y_i y_j) &\mapsto (y_i + a_i z)(y_j + a_i z) = y_i y_j + y_i a_j z + a_i z y_j \quad &\text{en } H^*(BG \times B(\mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p)\\ &\mapsto y_i y_j + (a_j y_i - a_i y_j) z &\text{en } H^*(BG \times B\mathbb{Z}; \mathbb{F}_p).\end{aligned} \tag{3.14}$$

y $\tilde{\tau}_g(y_i y_j) = (a_j y_i - a_i y_j)$. Ahora es posible presentar algunos ejemplos de la transgresión inversa, para los casos $n = 2$ and $n = 3$ y para los propósitos de este trabajo, en polinomios de grado 4. En el caso $n = 2$ la aplicación transgresión inversa en trivial. En el caso $n = 3$ la aplicación es un poco más interesante.

- $n = 2$. Como para $p \neq 2$ un número primo, se tiene que $H^*(BG; \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[x_1, x_2] \otimes \Lambda[y_1, y_2]$ con $|y_i| = 1$ y $|\beta y_i| = |x_i| = 2$, es suficiente considerar: $p_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 x_2$, $p_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_1 y_2$ y $p_3(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_2 y_1 y_2$. Para p_1 el cálculo de la ecuación (3.13) muestra que $\tilde{\tau}_g(p_1) = 0$. Entonces, es necesario hallar un elemento q para el cual sea posible hallar una $(\mathbb{Z}_p)$ combinación lineal de los polinomios p_2 y p_3 tales que $\beta(q) = 0$. Pero:

  $$\beta(p_3) = x_2(\beta(y_1)y_2 - y_1\beta(y_2)) = x_2(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

  y

  $$\beta(p_2) = x_1(\beta(y_1)y_2 - y_1\beta(y_2)) = x_1(x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

  Es decir, no existe una tal combinación lineal.

- $n = 3$. Analizando el grado de los polinomios y las opciones de todas las posibles combinaciones lineales se considera el siguiente elemento:

  $$q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3 + x_3 y_1 y_2,$$

  el cual satisface que $\beta(q) = 0$. Para ver esto, se usa la propiedad multiplicativa de β resaltada en la nota 3.5.3.

  $$\begin{aligned}\beta(q) &= \beta(x_1 y_2 y_3) - \beta(x_2 y_1 y_3) + \beta(x_3 y_1 y_2)\\ &= \beta(x_1) y_2 y_3 + x_1 \beta(y_2 y_3) - \beta(x_2) y_1 y_3 - x_2 \beta(y_1 y_3) + \beta(x_3) y_1 y_2 + x_3 \beta(y_1 y_2)\\ &= x_1 \beta(y_2) y_3 - x_1 y_2 \beta(y_3) - x_2 \beta(y_1) y_3 + x_2 y_1 \beta(y_3) + x_3 \beta(y_1) y_2 - x_3 y_1 \beta(y_2)\\ &= x_1 x_2 y_3 - x_1 y_2 x_3 - x_2 x_1 y_3 + x_2 y_1 x_3 + x_3 x_1 y_2 - x_3 y_1 x_2\\ &= 0.\end{aligned}$$

(3.15)

La transgresión inversa para un elemento $g = (a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{Z}_p)^3$ evaluada en el polínomio q da como resultado:

$$\begin{aligned}\tau_g(q) &= \tau_g(x_1y_2y_3) - \tau_g(x_2y_1y_3) + \tau_g(x_3y_1y_2)\\ &= x_1(a_3y_2 - a_2y_3) - x_2(a_3y_1 - a_1y_3) + x_3(a_2y_1 - a_1y_2)\\ &= a_1(x_2y_3 - x_3y_2) + a_2(x_3y_1 - x_1y_3) + a_3(x_1y_2 - x_2y_1)\end{aligned} \tag{3.16}$$

Lema 3.5.5. *Sean $g = (a_1, a_2, a_3)$ y $h = (b_1, b_2, b_3)$ elementos en $G = (\mathbb{Z}_p)^3$. La doble transgresión inversa del polinomio q es*

$$\tau_h\tau_g(q) = [(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)] \cdot (x_1, x_2, x_3).$$

Demostración. La demostración es reducida al cálculo directo de la composición de las transgresiones inversas $\tau_h\tau_g$ sobre el elemento q. □

Nota 3.5.4. Se desea resaltar que el ejemplo para $n = 3$ muestra de paso que para $n \geq 3$ la aplicación transgresión inversa no puede ser trivial. Siempre es posible considerar en $H^4((Z_p)^n;\mathbb{Z})$ el elemento $q(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = x_iy_jy_k - x_jy_iy_k + x_ky_iy_j$. Realizando cálculos similares a los efectuados en la ecuación 3.16, se puede probar que $\beta(q) = 0$ mientras $\tau_g(q) \neq 0$ para $g \in (\mathbb{Z}_p)^n$ distinto de cero.

Usando el cálculo de la transgresión inversa para el grupo $\mathbb{Z}_p$ presentado arriba y usando la fórmula de descomposición del Teorema (3.5.3), es posible dar la estructura explícita de la K-teoría torcida Orbidad para la Orbidad $[*/(\mathbb{Z}_p)^n]$, para $n = 3$. Note que en este caso

$${}^{\alpha}K_{str}([*/(\mathbb{Z}_p)^3]) = \bigoplus_{g\in(\mathbb{Z}_p)^3} {}^{\alpha_g}K_{(\mathbb{Z}_p)^3}(*) \cong \bigoplus_{g\in(\mathbb{Z}_p)^3} R_{\alpha_g}((\mathbb{Z}_p)^3).$$

Ahora, para cada $g \in \mathbb{Z}_p$, la fórmula de descomposición implica que:

$$R_{\alpha_g}((\mathbb{Z}_p)^3) \otimes \mathbb{Q} \cong \prod_{g,h\in(\mathbb{Z}_p)^3} \left(\mathbb{Q}(\zeta_p)_{h,\alpha_g}\right)^{(\mathbb{Z}_p)^3},$$

donde ζ_p es una raíz p-ésima de la unidad. Si se nota que la acción de $(\mathbb{Z}_p)^3$ sobre $\mathbb{Q}(\zeta_p)_{h,\alpha_g}$ es multiplicar por la doble transgresión inversa evaluada en $k \in (\mathbb{Z}_p)^3$, $\tau_h(\alpha_g)(k)$ y se utiliza el Lema (3.5.5), se tiene que:

$$\left(\mathbb{Q}(\zeta_p)_{h,\alpha_g}\right)^{(\mathbb{Z}_p)^3} := V_{g,h} = \begin{cases}\mathbb{Q}(\zeta_p) & \text{si } g = \lambda h,\ \lambda \in \mathbb{Z}_p \text{ o } g = 0 \text{ o } h = 0,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases} \tag{3.17}$$

Entonces para $h \neq 0$, se tiene que

$$R_{\alpha_g}((\mathbb{Z}_p)^3) \otimes \mathbb{Q} = \prod_{\lambda\in\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}(\zeta_p),$$

mientras para $g = 0$, se tiene que:

$$R_{\alpha_1}((\mathbb{Z}_p)^3) \otimes \mathbb{Q} = \prod_{\lambda \in (\mathbb{Z}_p)^3} \mathbb{Q}(\zeta_p).$$

Ahora en virtud del Lema (3.5.4) la estructura del producto en $K_{str}([*/(\mathbb{Z}_p)^3])$ queda definida vía la multiplicación de elementos en $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

4 El álgebra de Drinfeld torcida

4.1. Preliminares

En esta parte se desea introducir las *álgebras de Drinfeld torcidas* y mostrar la relación explícita con la K-teoría Orbidad torcida. En todo este segmento la referencia principal es [25]. Algunas de las definiciones presentadas en la primera parte son para explicar la naturaleza de tales álgebras y en gran parte no serán utilizadas en el desarrollo.

Sea G un grupo finito y k un cuerpo algebraicamente cerrado. Dado un elemento $\omega \in Z^3(G, k^*)$, es decir, una función $\omega : G \times G \times G \to k^*$ tal que

$$\omega(a, b, c)\omega(a, bc, d)\omega(d, c, d) = \omega(ab, c, d)\omega(a, b, cd) \text{ para todo } a, b, c, d \in G,$$

se define el álgebra quasi-triángular, quasi-Hopf $D^\omega(G)$ como el espacio vectorial $(kG)^* \otimes (kG)$, donde $(kG)^*$ es el dual del álgebra de grupo kG [11]. Considere la base canónica de elementos $\{\delta_g \otimes \bar{x}\}_{g,x \in G}$ de $D^\omega(G)$, donde δ_g es la función tal que $\delta_g(h) = 1$ si $h = g$, 0 en otro caso. Para abreviar, puede escribirse $\delta_g \otimes \bar{x} = \delta_g \bar{x}$. Sobre esta base se define el producto:

$$(\delta_g \bar{x})(\delta_h \bar{y}) = \omega_g(x, y)\delta_g \delta_{xhx^{-1}} \overline{xy} \tag{4.1}$$

donde ω_g es la imagen de ω vía la transgresión inversa en el elemento $g \in G$ presentada en la definición (3.1). Con este producto, el elemento $1_{D^\omega(G)} = \bigoplus_{g \in g} \delta_g \bar{1}$ es la identidad multiplicativa. Así puede usarse la notación δ_g para referirse al elemento $\delta_g \bar{1}$. El coproducto $\Delta : D^\omega(G) \to D^\omega(G) \otimes D^\omega(G)$ en el álgebra $D^\omega(G)$ es definido por la aplicación.

$$\Delta(\delta_g \bar{x}) = \bigoplus_{h \in G} \gamma_x(h, h^{-1}g)(\delta_h \bar{x}) \otimes (\delta_{h^{-1}g} \bar{x}), \tag{4.2}$$

donde

$$\gamma_x(h, l) = \frac{\omega(h, l, x)\omega(x, x^{-1}hx, x^{-1}lx)}{\omega(h, x, x^{-1}lx)}.$$

Usualmente el álgebra $D^\omega(G)$ con estas operaciones, es llamada el doble de Drinfeld torcido.

4.1.1. Representaciones de $D^\omega(G)$

Sean U, V módulos sobre el álgebra $D^\omega(G)$ (que también pueden verse como representaciones (π, U), (ρ, V) del álgebra $D^\omega(G)$), se considera el producto tensorial $U \otimes V$ como un $D^\omega(G)$-módulo con la acción de $D^\omega(G)$ inducida por el coproducto Δ. Note que el cuerpo k puede

considerarse como un $D^\omega(G)$-módulo el cual resulta ser trivial y salvo ismorfismo, es la identidad multiplicativa del producto tensorial de $D^\omega(G)$-módulos. Se toma el caso particual $k = \mathbb{C}$ y se define entonces el anillo de representaciones $Rep(D^\omega(G))$ de $D^\omega(G)$ como la $\mathbb{C}$-álgebra generada por el conjunto de clases de ismorfismo de $D^\omega(G)$-módulos con la suma directa de módulos como adición y el producto tensorial como producto. Se define ahora, el ideal $R_0(D^\omega(G))$ generado por todas las combinaciones $U - U' - U''$ donde $0 \to U' \to U \to U'' \to 0$ es una sucesión exacta corta de $D^\omega(G)$-módulos. Se define entonces el anillo de Grothendieck $R(D^\omega(G))$ como el cociente de $Rep(D^\omega(G))$ con el ideal $R_0(D^\omega(G))$.
El álgebra $D^\omega(G)$ es quasi-triángular con:

$$R = \bigoplus_{g,h\in G} \delta_g\bar{1} \otimes \delta_h\bar{g}, \text{ y } .R^{-1} = \bigoplus_{g,h\in G} \omega_{ghg^{-1}}(g, g^{-1})^{-1}\delta_g\bar{1} \otimes \delta_h\bar{g}^{-1}.$$

Entonces, $R\Delta(a)R^{-1} = \sigma(\Delta(a))$ para todo $a \in D^\omega(G)$, donde σ es el automorfismo que intercambia las imágenes en el coproducto. De este modo, si U y V son $D^\omega(G)$-módulos, esta ecuación implica que $U \otimes V$ y $V \otimes U$ son isomorfos como $D^\omega(G)$-módulos, es decir, el álgebra $Rep(D^\omega(G))$ es conmutativa. Ahora, suponga que $\beta : G \times G \to C^*$ es una cocadena con cofrontera:

$$\delta\beta(a, b, c) = \beta(b, c)\beta(a, bc)\beta(ab, c)^{-1}\beta(a, b)^{-1},$$

entonces el álgebra $D^\omega(G)^{\omega\delta\beta}(G)$ es isomorfa a $D^\omega(G)$, con un isomofismo dado por la aplicación:

$$\upsilon(\delta_g\bar{x}) = \frac{\beta(g, x)}{\beta(x, xgx^{-1})}\delta_g\bar{x}$$

y en particular se tiene el isomorfismo:

$$\upsilon^* : Rep(D^{\omega\delta\beta}(G)) \xrightarrow{\cong} Rep(D^\omega(G)).$$

Teorema 4.1.1 (cf. [23] Teorema 19)**.** *El anillo $Rep(D^\omega(G))$ es isomorfo aditivamente al anillo $\bigoplus_{(g)\subset G} R_\alpha(C(g))$, donde (g) denota la clase de conjugación del elemento $g \in G$*

Demostración. Para cada $x \in G$ considere los subespacios $S^\omega(x) := \bigoplus_{g\in C(x)} \mathbb{C}\delta_x\bar{g}$ y $D^\omega(x) := \bigoplus_{g\in G} \mathbb{C}\delta_x\bar{g}$ de $D^\omega(G)$. Se tiene que $S^\omega(x)$ es una subálgebra de $D^\omega(G)$ con elemento unidad $\delta_x\bar{1}$, tal que, en virtud del producto definido en $D^\omega(G)$, $S^\omega(x) \cong \mathbb{C}^{\omega_g}C(g)$ con la definición de $\mathbb{C}^{\omega_g}C(g)$ dada en el Capítulo anterior. Dada $(g) \subset G$, considere $D^\omega((g)) = \bigoplus_{h\in(g)} D^\omega(h)$. Observe que $D^\omega(G) \cong \bigoplus_{(g)\subset G} D^\omega((g))$ (aditivamente). Por otra parte, para un elemento h en una clase de conjugación (g) fija, considere un $S^\omega(h)$-módulo U, es decir, un $\mathbb{C}^{\omega_h}C(h)$-módulo, y defina la aplicación:

$$U \mapsto U \otimes_{S^\omega(h)} D^\omega(h),$$

cuya imagen es una $D^\omega((g))$-módulo si se considera la acción de $D^\omega((g))$ sobre $U \otimes_{S^\omega(h)} D^\omega(h)$ como la multiplicación a derecha en el segundo factor. Por otra parte, para V un $D^\omega((g))$-módulo, se define la aplicación:

$$V \mapsto V\delta_h\bar{1}.$$

Note que la imagen de esta aplicación es un $\mathbb{C}^{\omega_h}C(h)$-módulo, con lo cual las dos aplicaciones anteriores definen una equivalencia entre $\mathbb{C}^{\omega_h}C(h)$-módulos y $D^\omega((g))$-módulos, la cual debido al Teorema (3.2.2), implica que para cualquier $h \in (g)$:

$$R_{\omega_h}(C(h)) \cong Rep(D^\omega((g)))$$

y de allí que

$$Rep(D^\omega(G)) \cong \bigoplus_{(g)\subset G} R_\alpha(C(g)).$$

□

Fue notado en [8] que es posible describir el isomorfismo explícito usando la así llamada *inducción DPR*, la cual es definida sobre cada $R_\alpha(C(g))$. Sea (ρ, V) una representación torcida del grupo $C(g)$. Se define entonces la representación $\psi((\rho, V)) := (\pi_\rho, A)$ de $D^\omega(G)$ por la fórmula:

$$\begin{aligned} A :=& Ind^G_{C(g)}(V) \\ &\text{y} \\ \pi_\rho(\delta_k \bar{x})x_j \otimes v :=& \delta_k \delta_{x_s g x_s^{-1}} \frac{\omega_k(x, x_j)}{\omega_k(x_s, r)} x_s \otimes \rho(r)v. \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde x_j es un representante de una clase en $G/C(g)$, $r \in C(g)$ y el elemento x_s es un representante de una clase en $G/C(g)$, elegido tal que $xx_j = x_s r$.

4.2. K-teoría torcida para la Orbidad $[*/G]$

Se toma la estructura de Orbidad definida por la acción trivial de G sobre el espacio $M = \{*\}$. Para esta acción, y para cada elemento $\omega \in Z^3(G; \mathbb{S}^1)$, la expresión de la K-teoría torcida Orbidad dada en la definición 3.3 en el Capítulo anterior, y según el Lema (3.3.2), es el anillo:

$${}^\omega K_{str}([*/G]) = \bigoplus_{(g)\subset G} {}^{\omega_g}K_{C(g)}(*) \cong \bigoplus_{(g)\subset G} R_{\omega_g}(C(g)) \tag{4.4}$$

Por el Teorema (4.1.1) se tiene entonces un isomorfismo aditivo entre $Rep(D^\omega(G))$ y la K-teoría torcida Orbidad ${}^\omega K_{str}([*/G])$. Aunque se puede establecer una relación aún más estrecha:

Teorema 4.2.1. *La iducción DPR es un isomorfismo de anillos:*

$$({}^\omega K_{str}([*/G]), \star_\omega) \cong (Rep(D^\omega(G)), \otimes).$$

Demostración. El objetivo es mostrar que si se dota el anillo ${}^{\omega}K_{str}([*/G])$ del producto torcido $\star_\alpha$ entonces la inducción DPR es de hecho un morfismo de anillos. Para esto, considere dos elementos $(\rho, V) \in R_{\omega_g}(C(g))$, $(\gamma, W) \in R_{\omega_h}(C(h))$ y se observa que:

$$\begin{aligned}
I^G_{C(g)}(E) \otimes I^G_{C(h)} &\cong I^G_{C(g)}(E \otimes R^G_{C(g)}(I^G_{C(h)}(F))) \\
&\cong I^G_{C(g)}(E \otimes I^G_{C(g)}(R^{C(h)}_{C(g)\cap C(h)}(F) \otimes \gamma_{g,h})) \\
&\cong I^G_{C(g)}(I^{C(g)}_{C(g)\cap C(h)}(R^{C(g)}_{C(g)\cap C(h)}(E) \otimes R^{C(h)}_{C(g)\cap C(h)}(F) \otimes \gamma_{g,h})) \\
&\cong I^G_{C(g)\cap C(h)}(R^{C(g)}_{C(g)\cap C(h)}(E) \otimes R^{C(h)}_{C(g)\cap C(h)}(F) \otimes \gamma_{g,h}) \\
&\cong I^G_{C(gh)}(I^{C(gh)}_{C(g)\cap C(h)}(R^{C(g)}_{C(g)\cap C(h)}(E) \otimes R^{C(h)}_{C(g)\cap C(h)}(F) \otimes \gamma_{g,h})) \\
&\cong I^G_{C(gh)}(E \star_\omega F)
\end{aligned}$$

Con lo cual el resultado queda demostrado. □

4.2.1. K-teoría torcida para un p-grupo extra especial.

Dado un primo p impar, un p-grupo es considerado *extra-especial* cuando su centro $Z(G)$ y su subgrupo derivado G^* son isomorfos a $\mathbb{Z}p$, es decir $Z(G) \cong \mathbb{Z}_p$. Todo p-grupo extra especial tiene orden p^{2n+1} para algún número natural n. Recíprocamente, para cada n existen dos grupos extra especiales de orden p^{2n+1} diferenciados tan sólo en que uno de ellos tiene índice p y el otro p^2. El objetivo de esta sección es relacionar la K-teoría torcida Orbidad para el Orbifold $[*/H]$ y $[*/G]$, con H un grupo extra especial de exponente p y orden p^{2n+1} y $G = (\mathbb{Z}_p)^{2n+1}$. Este tipo de relaciones están motivadas por trabajos como [14] donde se estudian estas relaciones para $p = 2$ y en alguna medida, los resultados obtenidos por A. Duman en [12]. Empero, existe un interés más profundo en estudiar este tipo de relaciones estableciendo una correspondencia con las álgebras de Drinfeld torcidas, y es el de intentar observar una posible generalización de este resultado a Orbidades $[M/H]$ y $[M/G]$ con H y G dos grupos posiblemente no abelianos. Sin duda ese será un interesante tópico de investigaciones futuras. Básicamente, se considera el siguiente resultado debido a D. Naidu y D. Nikshych [18]:

Teorema 4.2.2 (ver [18], Corolario 4.20)**.** *Sea H un grupo finito, $\omega' \in Z^3(H; \mathbb{S}^1)$ tal que*

- *contiene un subgrupo K normal y abeliano,*
- *$\omega'|_{K\times K\times K}$ es cohomológicamente trivial (en $H^3(K; \mathbb{S}^1)$),*
- *existe una 2-cocadena μ H-invariante sobre H tal que $\delta(\mu)|_{K\times K\times K} = \omega'|_{K\times K\times K}$.*

Entonces se construye un grupo G y un elemento $\omega \in Z^2(G; \mathbb{S}^1)$ tal que $Rep(D^\omega(G)) \cong Rep(D^{\omega'}(H))$.

En virtud de la relación establecida en la primera parte de este Capítulo entre las álgebras de Drinfeld torcidas y la K-teoría torcida Orbidad, se tiene el siguiente Corolario, establecido en las mismas hipótesis que el resultado inmediatamente anterior:

Corolario 4.2.3. *Existe un isomorfismo de anillos:*

$$^{\omega}K_{str}([*/G]) \cong {}^{\omega'}K_{str}([*/H]).$$

Finalizamos entonces este Capítulo con una bonita aplicación de estos resultados:

Proposición 4.2.4. *Sea H un grupo extra especial de orden p^{2n+1} e índice p. Se tiene entonces que:*

$$K_{str}([*/H]) \cong {}^{\omega}K_{str}([*/(\mathbb{Z}_p)^{2n+1}])$$

para algún torcimiento no trivial ω.

Demostración. Considere H un grupo extra especial. Desde la definición, es posible considerar $K = Z(H) \cong \mathbb{Z}_p$. Ahora, suponga que existe un $\mu \in C^2(H;\mathbb{S}^1)$ tal que $\delta(\mu)|_{K\times K\times K} = \omega'|_{K\times K\times K}$ el cual es H-invariante, es decir, si se considera la acción de H sobre las 2-cocadenas $C^2(H;\mathbb{S}^1)$ definida por ${}^{y}\mu := \mu(yx_1y^{-1}, yx_2y^{-1})$, entonces debe tenerse que ${}^{y}\mu = \mu$ en $C^2(H;\mathbb{S}^1)$, para todo $y \in H$. Ahora, como K es normal, naturalmente ${}^{y}\mu|_K = \mu|_K$ para todo $y \in H$. Debe existir entonces para cada $y \in H$, una 1-cadena η_y sobre H tal que $\delta\eta_y = \frac{{}^{y}\mu}{\mu} = 1$. Como K es abeliano, lo anterior permite entonces definir una aplicación:

$$\begin{aligned} \nu :& H/K \times H/K \to C^1(H;\mathbb{S}^1) \\ &(y_1, y_1) \mapsto \frac{{}^{y_2}\eta_{y_1}\eta_{y_2}}{\eta_{y_1y_2}}. \end{aligned}$$

Lema 4.2.5 (ver [17] Lema 4.2, Corolario 4.3)**.** *La función ν define un elemento en $H^2(H/K;\hat{K})$).*

El símbolo $\hat{K}$ denota el grupo de homomorfismos del grupo K a $\mathbb{S}^1$. Ahora bien, este elemento representa una sucesión exacta corta:

$$1 \to \hat{K} \to \hat{K} \rtimes_{\nu} H/K \to H/K \to 1,$$

donde el producto en $\hat{K} \rtimes_v H/K$ es definido por la fórmula $(\rho_1, x_1)(\rho_2, x_2) := (\nu(x_1, x_2)\rho_1\rho_2, x_1x_2)$.
Se define entonces el elemento $\omega \in Z^3(G;\mathbb{S}^1)$, con $G := \hat{K} \rtimes_{\nu} H/K$ para cada $(\rho_1, x_1), (\rho_2, x_2), (\rho_3, x_3) \in \hat{K} \rtimes_{\nu} H/K$, por la fórmula:

$$\omega((\rho_1, x_1)(\rho_2, x_2)(\rho_3, x_3)) := (\nu(x_1, x_2)(u(x_3)))(1)\rho_1(k_{x_2,x_3}),$$

donde $u : H/K \to H$ es una función tal que al componer con la proyección natural $p : H \to H/K$ resulta $p(u(x)) = x$ y $k_{x_2,x_3} \in H$ es un elemento tal que $u(x_1)u(x_2) = k_{x_1,x_2}u(p(u(x_1)u(x_2)))$.
Claramente, cuando ω' es el 3-cociclo trivial, se puede elegir μ trivial y por tanto ν es

trivial también. Como desde la definición de un grupo extra especial, su grupo derivado $H' \subset Z(H) = K$, entonces H/K es un grupo abeliano y si ν es trivial, claramente $\hat{K} \rtimes_\nu H/K \cong (\mathbb{Z}_p)^{2n+1}$. Sólo resta entonces mostrar que ω no es trivial en $H^3(G; \mathbb{S}^1)$. Considere $H = \{h_1, \ldots, h_{p^{2n+1}}\}$, $K = Z(H) = \{z_1, \ldots, z_p\}$. Sea $\hat{K} = \{\rho_1, \ldots, \rho_p\}$, con ρ_i no trivial para $i \neq 1$. Denote el grupo cociente $H/K = \{x_1 K, \ldots, x_{p^{2n}} K\}$, con $x_1 = 1_{H/K}$. Se define la función $u : H/K \to H$ tal que $u(x_i K) = x_i(z_i^{-1})$ para $x_i K \in H/K$, $z_j \in K$. Considere el elemento $((\rho, x_i K), (\rho, x_i K), (\rho, x_i K))$ con $\rho \in \hat{K}$ fija y no trivial. Como se elige ν trivial, el elemento ω queda reducido a $\rho(k_{x_i K, x_i K}) = \rho(z_i) \neq 1$, lo cual asegura que ω es no trivial. $\square$

5 Conceptos Básicos

El espíritu de este segmento es presentar las herramientas teóricas provenientes de la topología algebraica que justifican y fundamentan los desarrollos incluidos en los capítulos anteriores. Por otra parte contiene un gran número de ejemplos de gran utilidad en los cálculos y para simplificar las ideas generales de esta tesis. Iniciamos con una sección dedicada a la presentación de dos invariantes topológicos clásicos, los anillos de cohomología y K-teoría asociados a una variedad diferencial X. A continuación presentamos algunos conceptos de grupos de Lie y acciones de grupos sobre variedades. Esto con la intención de introducir una forma general de los anillos de cohomología y K-teoría, los anillos de cohomología equivariante y K-teoría equivariante. Finalizamos con una sección que desarrolla el concepto de Orbifold.

5.1. K-teoría

5.1.1. Haces vectoriales

Las construcciones presentes en esta sección son de gran interés para este trabajo, por lo cual, la intención es de concentrar un gran número de herramientas que justifican algunos de los cálculos y que más adelante se reconsiderarán con el contexto de alguna estructura adicional como acciones de grupos y equivarianza. La mejor referencia que ha sido posible hallar en el libro de A. Hatcher de Haces vectoriales y K-teoría [15].

Definición 5.1.1. Dados E, B espacios topológicos, una aplicación continua $p : E \to B$ es un *haz vectorial* de dimensión n si para cada $b \in B$, $p^{-1}(b) \subset E$ tiene una estructura de espacio vectorial de dimensión n de tal manera que se cumple la siguiente propiedad llamada *trivialidad local*: Existe un cubrimiento de B por abiertos U_α para cada uno de los cuales existe un homeomorfismo $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ que aplica a $p^{-1}(b)$ isomorficamente, como espacio vectorial, sobre $p \times \mathbb{R}^n$. Se puede considerar en el lugar de $\mathbb{R}^n$, el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ y se obtiene la noción haz vectorial complejo.

Ejemplo 7. Recuerde que el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ es el espacio de todas las rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$. Se puede definir un haz vectorial canónico sobre $\mathbb{R}P^n$ determinado por el conjunto de puntos

$$E = \{(l, v) | l \text{ es una línea en } \mathbb{R}P^n, v \in l\} \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Se puede definir la aplicación $P : E \to \mathbb{R}P^n$ como $p(l, v) = l$. Para definir las trivializaciones locales, considere una vecindad U_l de un punto l en $\mathbb{R}P^n$. Entonces se define:

$$h_l : p^{-1}(U_l) \to U_l \times p^{-1}(l) \cong U_l \times \mathbb{R}^{n+1}$$

como $h_l(s, v) = (s, \pi_l(v))$, donde π_l es la proyección ortogonal sobre $p^{-1}(l)$.

Un isomorfismo entre dos haces vectoriales $p_1 : E_1 \to B$ y $p_2 : E_2 \to B$ se define como un homeomorfismo $h : E_1 \to E_2$ que envía a cada $p_1^{-1}(b)$ en el correspondiente $p_2^{-1}(b)$ vía un isomorfismo lineal.

Ejemplo 8. Considere el espacio E obtenido como el cociente de $I \times \mathbb{R}$ bajo las identificaciones $(0, t) \sim (1, -t)$. La proyección $I \times \mathbb{R} \to I$ induce una aplicación $p : E \to S^1$ que esun haz vectorial 1-dimensional sobre S^1. Note que como $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$, E puede considerarse como haz vectorial sobre $\mathbb{R}P^1$ que resulta ser isomorfo al haz canónico definido en el ejemplo anterior.

Secciones. Una sección de un haz vectorial $p : E \to B$ es una aplicación $s : B \to E$ que asigna a cada $b \in B$ un vector $s(b) \in p^{-1}(b)$. Todo haz vectorial tiene una sección canónica asociada, cuyo valor en todo punto es cero. Esta sección canónica se le llama la sección cero del haz vectorial.

5.1.2. Operaciones entre Haces vectoriales

La idea de las operaciones entre haces vectoriales es generalizar de forma natural las operaciones que se definen usando álgebra lineal sobre los espacios vectoriales. Particularmente se está interesado en estudiar las generalizaciones de la suma directa, el producto interno, el producto tensorial y el productor exterior de espacios vectoriales.
Suma directa de haces vectoriales Dados dos haces $p_1 : E_1 \to B$ y $p_2 : E_2 \to B$ sobre el mismo espacio base B se define un nuevo haz vectorial como el conjunto:

$$E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 : p_1(v_1) = p_2(v_2)\}.$$

La aplicación $p_1 \oplus p_2 : E_1 \oplus E_2 \to B$, que aplica a cada punto (v_1, v_2) en $p_1(v_1) = p_2(v_2)$, junto con las trivializaciones locales naturales, define un haz vectorial sobre B.
Producto interno. Un producto interno sobre un haz vectorial $p : E \to B$ es una aplicación

$$\langle , \rangle : E \oplus E \to \mathbb{R}$$

que restringe en cada espacio vectorial $p^{-1}(b)$ con $b \in B$, a un producto interno.

Proposición 5.1.1. *Si B es un espacio paracompacto, siempre existe un producto interno sobre un haz vectorial $p : E \to B$.*

Un sub haz de un haz $p : E \to B$, se define como un subespacio $E_0 \subset E$ tal que E_0 intercepta $p^{-1}(b)$ para cada $b \in B$ y la restricción de $p : E_0 \to B$ es un haz vectorial sobre B. Si el espacio B es paracompacto, la proposición anterior nos permite definir la noción de ortogonalidad entre sub haces de un haz vectorial $p : E \to B$.

Proposición 5.1.2. *Dado $p : E \to B$ un haz vectorial sobre un espacio paracompacto B, existe un sub haz $p : E_0 \to B$ tal que $E_0 \oplus E_0^{\perp} = E$*

Si adicionamos compacidad al espacio B, obtenemos el siguiente resultado sobre los haces vectoriales:

Proposición 5.1.3. *Para cada haz vectorial $p : E \to B$ sobre un espacio compacto B existe un haz $p' : E' \to B$ sobre B tal que $E \oplus E'$ es un haz trivial sobre B.*

Producto tensorial. Dados $p_1 : E_1 \to B$ y $p_2 : E_2 \to B$ dos haces vectoriales sobre el mismo espacio B, definimos el conjunto:

$$E_1 \otimes E_2 = \amalg_{b \in B} p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b).$$

Se eligen las aplicaciones $h_i : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, para cada abierto $U \subset B$ en donde E_1 y E_2 son haces triviales respectivamente y se consideran las aplicaciones inducidas:

$$h_1 \otimes h_2 : p^{-1}(U) \otimes p^{-1}(U) \to U \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2}).$$

Se considera sobre $E_1 \otimes E_2$ la topología que hace continuas estas aplicaciones inducidas.
Potencias exteriores. La protencia exterior $\Lambda^k(V)$ de un espacio vectorial V se define como el cociente del producto tensorial $V \otimes \cdots \otimes V$, k-veces del espacio V, por el subespacio generado por los vectores de la forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k - Sig(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$ donde σ es una permutación de los elementos $(1, \ldots, k)$ y $Sig(\sigma)$ representa el signo de la permutación. Si V tiene dimensión n, entonces el espacio $\Lambda^k(V)$ tiene dimensión $\binom{n}{k}$.
Ahora bien, para un haz vectorial $p_1 : E \to B$ considere la unión disyunta de la potencias $\Lambda^k(E) := \bigsqcup_{b \in B} \Lambda^k(p^{-1}(b))$. Se define sobre $\Lambda^k(E)$ la topología inducida por las trivializaciones locales. De esta manera se obtiene un haz vectorial sobre B.

5.1.3. Pullback de haces vectoriales

Se nota el conjunto de clases de isomorfía de haces vectoriales reales de dimensión n sobre B como el conjunto $Vec^n_{\mathbb{R}}(B)$.

Proposición 5.1.4. *Dada una aplicación continua entre dos espacios $f : A \to B$ y un haz vectorial $p : E \to B$, existe un haz vectorial $p' : E' \to A$ de manera que en cada punto $a \in A$, $p'^{-1}(a)$ es isomorfo a $p^{-1}(f(a))$. Este haz E' es único salvo isomorfía.*

En virtud de la aplicación anterior tenemos que dada una aplicación continua $f : A \to B$, podemos inducir una aplicación $f^* : Vec^n_{\mathbb{R}}(B) \to Vec^n_{\mathbb{R}}(A)$. Una tal aplicación es llamada el pullback de haces vectoriales y satisface:

- $(fg)^*(E) \cong g^*(f^*(E))$.
- $1^*(E) \cong E$.
- $f^*(E_1 \oplus E_2) \cong f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$.
- $f^*(E_1 \otimes E_2) \cong f^*(E_1) \otimes f^*(E_2)$.

Proposición 5.1.5. *Si $f : A \to B$ es una equivalencia homotópica entre espacios paracompactos, entonces $f^* : Vec^n_{\mathbb{R}}(B) \to Vec^n_{\mathbb{R}}(A)$ es una biyección.*

K-teoría

Note que es posible considerar en lugar de haces sobre $\mathbb{R}$, los haces complejos, es decir haces sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Estos son haces vectoriales $p : E \to B$ tales que para cada $b \in B$, el espacio vectorial $p^{-1}(b)$ tiene dimensión n sobre $\mathbb{C}$. Naturalmente las trivializaciones locales tienen la forma $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$. Sobre estos haces están definidas las mismas operaciones que sobre los haces reales y los pullback de haces complejos tienen las mismas propiedades. En adelante un haz vectorial sobre B significará haz vectorial complejo sobre B salvo alguna mención explícita.

Definición 5.1.2. Considere $K(B, \mathbb{Z})$ el grupo libre generado por clases de isomorfismo de haces vectoriales sobre B partido por el subgrupo generado por todos los elementos de la forma

$$[E] \ominus ([E''] \oplus [E''])$$

tales que los haces vectoriales E, E', E'' sobre B forman la suseción exacta corta

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

y $\ominus$, $\oplus$ denotan la sustracción y la suma en el grupo libre, respectivamente.

Si se pone $K(B) := K(B, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tenemos el grupo de K-teoría de B. La operación producto tensorial de haces da a $K(B)$ la estructura de anillo conmutativo mediante la operación multiplicación

$$[E] \otimes [F] := [E \otimes F].$$

5.2. Acciones de grupos

5.2.1. Acciones de grupo

En todo este trabajo G representa un grupo. Los resultados son enfatizados sobre grupos con estructura adicional por ejemplo los *grupos de Lie* compactos, pero el desarrollo intentará ser lo más general posible.

Definición 5.2.1. Un grupo G es llamado de Lie si sus elementos como conjunto tienen una estructura de variedad difereciable que es compatible con la operación producto del grupo. Es decir, si para cada par de elementos $g, h \in G$ la aplicación $(g, h) \mapsto g^{-1}h$ es una aplicación diferenciable. Un grupo de Lie será compacto cuando sea una variedad diferenciable compacta.

Para un grupo general G y una variedad diferencial M, una acción de G en M es una aplicación $G \times M \to M$, donde $(g, m) \mapsto g(m)$ para cada elemento $g \in G$ y cada elemento $m \in M$, tales que para cada $g, h \in G$, $g(h(m)) = gh(m)$, para todo $m \in M$. Cuando el grupo G es de Lie, lo que se tiene es un homomorfismo del grupo G en el grupo $Diff(M)$ pero que por simplicidad en la notación se expresa como $g(m)$ o simplemente gm cuando no hay lugar a ambigüedades. Cuando se tiene una acción de un grupo G sobre una variedad M, ésta es llamada una G-variedad. Una aplicación $\varphi : M \to W$ entre G-variedades diferenciales se llama *equivariante* o una G-aplicación, si para cada $g \in G$ y cada $m \in M$, $\varphi(g(m)) = g\varphi(m)$, es decir, si es compatible con la acción.

Definición 5.2.2. Para cada punto $m \in M$, se define el conjunto $G \cdot m = \{gm \in M : g \in G\}$, llamado la órbita del elemento m.

Dada la acción de un grupo G sobre una variedad diferenciable M, donde cada elemento del grupo genera un difeomorfismo de la variedad en si misma, se puede definir el conjunto cociente de la acción como la variedad M por la relación de equivalencia definida como: para cada par de puntos $m, n \in M$, $m \sim n$, si $n \in G \cdot m$. El cociente de esta acción, es decir, el conjunto de órbitas de la acción no siempre conserva la estructura de variedad diferenciable de la variedad inicial. Que el cociente de la acción sea o no una variedad diferenciable dependerá incialmente de los puntos fijos de la acción de G sobre M. Un punto fijo de la acción es un elemento de la variedad que es punto fijo de todos los difeomorfismos determinados por el grupo, donde para $g \in G$ se dice que $m \in M$ es un punto fijo de g si $g(m) = m$. Si algún elemento del grupo tiene puntos fijos, esto impide que la condición de ser variedad diferenciable sea heredada al conjunto de órbitas de la acción.
Sin embargo, cuando se está interesado en la acción de un grupo de Lie compacto G, actuando sobre una variedad diferenciable compacta M, y se adiciona alguna condición sobre la acción, es posible obtener ciertas propiedades de gran interés.

Definición 5.2.3. Dado un elemento $m \in M$, definimos el grupo estabilizador de m como el conjunto

$$G_m = \{g \in G | g(m) = m\}.$$

Como es fácil observar desde la definición, si $g \in G_m$ entonces $g^{-1} \in G_m$, y como además $e \in G_m$ para todo $m \in M$ (donde e la identidad de G) tenemos que G_m es un subgrupo de G, a menudo llamado *grupo de isotropía* de m. Para algunos elementos este subgrupo puede reducirse a la identidad de G y si esto ocurre para todos los elementos de M, la acción se llama *libre*. Cuando existen elementos $m \in M$ con $G_m \neq \{e\}$ y adicionalmente con $|G_m| < \infty$ para cada $m \in M$, la acción se llama casi libre. Si la acción del grupo es libre, es en particular casi libre. Si el grupo G es finito, su acción es siempre una acción casi libre. A continuación se presenta un ejemplo de un grupo de Lie infinito actuando de manera casi libre.

Ejemplo 9. Considere el grupo $G = S^1$ y $M = \mathbb{C}P^n$ con la acción definida por: $\lambda([z_0 : \cdots : z_n]) = [\lambda^{p_0} z_0 : \cdots : \lambda^{p_n} z_n]$ con $p_0, \ldots, p_n$ números primos diferentes. Observe que los elementos de la forma $[0 : \cdots : 0 : z_i : 0 : \cdots : 0]$ son puntos fijos para el conjunto estabilizador $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{p_i - 1}\}$. Este grupo es el conjunto de raices p_i-ésimas de la unidad que es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_{p_i}$ con estructura aditiva. Todos los elementos de $\mathbb{C}P^n$ que son punto fijo de la acción de S^1 que han sido considerados tienen grupos estabilizadores de cardinal finito, entonces se tiene un primer ejemplo de una acción de tipo casi libre y que no proviene de la acción de un grupo finito.

Los estabilizadores de dos puntos en la misma órbita son grupos de isotropía conjugados, es decir, si $m, n \in M$, con M una G-variedad, son tales que $n \in G \cdot m$, entonces existe un $g \in G$ tal que $G_n = gG_m g^{-1}$. Cada órbita tiene asociada una clase de conjugación de subgrupos de G nombrada como el tipo de órbita.
Para $m \in M$ fijo, consideramos la aplicación $\theta : G \to M$ definida por $\theta(g) = gm$. Entonces tenemos una aplicación inyectiva $\theta' : G/G_m \to M$ que es de hecho una inmersión, cuya imagen es la órbita de m. Particularmente, cuando G es un grupo de Lie compacto tenemos que la aplicación es propia, por lo tanto es una submersión. De lo anterior, la imagen de θ' es una subvariedad de M. Es decir, si el grupo de Lie G es compacto, las órbitas de los puntos son subvariedades de M.
Sea $m \in M$. Considere un elemento $g \in G_m$. La aplicación:

$$T_g : T_m M \to T_m M$$

es un isomorfismo del espacio vectorial tangente a la variedad M en m sobre si mismo. Por lo anterior, el espacio vectorial $T_m(G \cdot m)$ es un espacio invariante del anterior isomorfismo. Por lo tanto, se puede descomponer el espacio tangente $T_m M$ como:

$$T_m M = T_m(G \cdot m) \oplus W_m$$

donde W_m es el espacio $T_m M / T_m(G \cdot m)$. Pero como el espacio $T_m(G \cdot m)$ es invariante, la aplicación T_g define un isomorfismo de W_m en si mismo. Se tiene entonces para cada punto

$m \in M$ una representación lineal del grupo G_m como un subgrupo de $GL(W_m)$. El grupo G_m actua sobre $G \times W_m$ mediante la acción:

$$h(g, w) = (gh^{-1}, hw)$$

la cual es una acción libre debido a que es libre en el primer factor. Entonces, se puede definir el cociente $(G \times W_m)/G_m$ denotado $G \times_{G_m} W_m$. Se tiene además la acción natural de G sobre

$$G \times_{G_m} W_m$$

inducida por la multiplicación del grupo G. Es posible considerar entonces a G/G_m como una subvariedad de la variedad $G \times_{G_m} W_m$, llamada la sección cero.

Proposición 5.2.1. *Existe un difeomorfismo equivariante desde una vecindad equivariante de la sección cero en $G \times_{G_m} W_m$ a una vecindad abierta de $G \cdot m$ en M, la cual envía la sección cero G/G_m sobre la órbita $G \cdot m$ por la aplicación natural $\theta' : G/G_m \to M$.*

Dos elementos tienen el mismo tipo de órbita, si son grupo de isotropía de dos elementos en la misma órbita.

Lema 5.2.2. *Si G es un grupo de Lie compacto actuando sobre una variedad compacta M, entonces sólo existe un número finito de tipos de órbita.*

Corolario 5.2.3. *El conjunto:*

$$\tilde{C} := \{(g) \subset G | M^g \neq \emptyset\} \tag{5.1}$$

es finito. El símbolo M^g denota el conjunto $\{m \in M | gm = m\}$.

5.3. Cohomología equivariante

Definición 5.3.1. Definimos el espacio $EG(n)$ como el cociente

$$G^{n+1} \times \Delta^n = \{(x_0, t_0; \dots; x_n, t_n) | x_i \in G, t_i \in [0,1], \sum t_i = 1\}$$

por la relación de equivalencia:

$$(x_0, t_0; \dots; x_n, t_n) \sim (x'_0, t'_0; \dots; x'_n, t'_n) \Longleftrightarrow \begin{cases} t_i = t'_i & \text{Para todo } i, \\ t_i = t'_i \neq 0 \Longrightarrow & x_i = x'_i. \end{cases}$$

Se puede escribir $\langle x_0, t_0; \dots; x_n, t_n \rangle$, o más brevemente $\langle x, t \rangle$, para la clase de equivalencia de los elementos bajo consideración. Para cada n la inclusión $EG(n) \subset EG(n+1)$ es definida como

$$\langle x_0, t_0; \dots; x_n, t_n \rangle \mapsto \langle x_0, t_0; \dots; x_n, t_n; x_{n+1}, 0 \rangle,$$

por lo cual se puede definir el espacio $EG := \text{lím}_{\to} EG(n)$.

El grupo G actúa sobre $EG(n)$ y EG por $g\langle x,t\rangle = \langle gx,t\rangle$. Esta acción es libre, por lo cual los cocientes serán notados repectivamente $BG(n)$ y BG. Si M es una G-variedad, el espacio de órbitas puede ser bastante complicado si la acción no es libre. Para intentar tener un sustituto razonable de este espacio de órbitas, se considera G actuando sobre $EG \times M$ por $g(p,x) = (gp, gx)$ lo cual es una acción libre porque la acción sobre EG es libre. Por lo cual el espacio de órbitas es

$$M_G := (EG \times M)/G := EG \times_G M$$

. Si se consideran las dos proyecciones $p_1 : EG \times M \to EG$ y $M_G \to BG$ se induce una aplicación continua $\sigma : M_G \to M/G$. Si G es un grupo de Lie compacto y la acción de G sobre M es libre, esta aplicación es una equivalencia homotópica. Esto es una ventaja pues si la acción de G sobre M tiene puntos fijos el espacio cociente M/G podría no tener las propiedades deseables, mientras que M_G es siempre un cociente proveniente de una acción libre.

Definición 5.3.2 (Cohomología equivariante)**.** La *cohomología equivariante* de una variedad M dotada con una acción de un grupo G, notada $H^*_G(M)$, es la cohomología de M_G.

5.3.1. K-teoría equivariante

5.3.2. Haces vectoriales equivariantes

Como consecuencia de la accion de un grupo G sobre una variedad M se puede introducir la noción y herramientas básicas del trabajo con haces vectoriales equivariantes. Los principios y buena parte de los resultados que se presentan aquí corresponden a los trabajos logrados por M. Atiyah y G. Segal en [4] y por Segal en [22, 21].

Definición 5.3.3. Dada una G-variedad M, un G-haz vectorial sobre M es un G-espacio E junto con una G-aplicación $p : E \to M$, es decir tal que $p(g(\zeta)) = g(p(\zeta))$ para todo $g \in G$, $\zeta \in E$ y que cumple con siguientes propiedades:

(i) $p : E \to M$ es un haz vectorial complejo sobre M, es decir, las fibras $E_m = p^{-1}(m)$, para $m \in M$, son espacios vectoriales complejos.

(ii) Para todo $g \in G$, la acción $g : E_m \to E_{g(m)}$ es un homomorfismo de espacios vectoriales.

Naturalmente, estos haces equivariantes heredan la equivarianza al hacer construcciones como la suma de haces y el producto tensorial de haces, debido a que estos están definidos sobre los espacios vectoriales $p^{-1}(m)$ para cada $m \in M$. En particular para cada haz equivariante $p : E \to M$ existe un producto interno equivariante $\langle *, * \rangle_G$. Por otra parte, el producto exterior de haces equivariantes se mantiene equivariante, de hecho da lugar a una aplicación equivariante en el anillo $K(M)$. Se considera $K_G(M)$, construido reemplazando en la construcción de $K(M)$ los haces vectoriales por G-haces vectoriales, como la K-teoría equivariante de M. Si $f : N \to M$ es una G-aplicación de G-variedades compactas, el pull-back $E \mapsto f^*E$ induce un morfismo de anillos $f^* : K_G(M) \to K_G(N)$ ([21], Capítulo 2). Si se tiene H otro grupo de Lie compacto y un homomorfismo de grupos $\alpha : H \to G$ este induce un morfismo de restricción $K_G(M) \to K_H(M)$. Más generalmente, si $f : N \to M$ es una aplicación continua desde una H-variedad a una G-variedad compatible con α, se tiene

$$f^* : K_G(M) \to K_H(N).$$

Si G es trivial, se tiene que la K-teoría equivariante $K_G(M)$ coincide con la K-teoría usual $K(M)$. Cuando $M = \{*\}$ es un punto, se considera los haces vectoriales equivariantes por la acción de G sobre el punto, esto es, todas las representaciones lineales del grupo G. Por lo cual $K_G(*) \cong R(G)$, el anillo de representaciones del grupo G. En general, $K_G(M)$ es un módulo sobre el anillo $R(G)$, debido a la aplicación natural de un G-espacio a un punto. Para cualquier G-variedad compacta M, la proyección de M sobre su espacio de órbitas por la acción de G, M/G induce un morfismo $pr^* : K(M/G) \to K_G(M)$.
Si H es un subgrupo cerrado de G, y M es una H-variedad compacta, se puede formar un G-espacio compacto

$$(G \times M)/H := G \times_H M \tag{5.2}$$

donde la acción desde H es definida en cada coordenada como $h(g, m) = (gh^{-1}, hm)$. Existe un embebimiento

$$f : M \to G \times_H M$$

que identifica M con el H-subespacio $H \times_H M$ de $G \times_H M$.
Por otra parte, si la acción del grupo G sobre M es trivial, se puede considerar la aplicación pr^* de $K(M)$ a $K_G(M)$ la cual aplica sobre cualquier haz vectorial E sobre M la acción trivial de G. La aplicación de M a un punto induce $\varphi : R(G) \to K_G(M)$. Se pueden juntar estas dos aplicaciones para definir una aplicación:

$$\mu^* : K(M) \otimes R(\Gamma) \to K_\Gamma(M)$$

dada por $(E \otimes \chi) \mapsto (pr^*(E)\varphi(\chi))$.

Proposición 5.3.1 ([21] prop. 2.2)**.** *Si M es una variedad con una acción trivial de G, la aplicación:*

$$\mu^* : K(M) \otimes R(\Gamma) \to K_\Gamma(M)$$

es un isomorfismo.

5.3.3. λ-anillos

Una importante propiedad del anillo $K(M)$ es que tiene una estructura de λ-*anillo*. Esto es, para cada entero no negativo i, existe una aplicación $\lambda^i : K(M) \to K(M)$ definida por

$\lambda^i(\mathtt{E}) := [\Lambda^i E]$, donde Λ^i es la i-ésima potencia exterior del haz vectorial E y donde $\mathtt{E}$ denota la clase de E en $K(M)$. En particular, $\lambda^0(\mathtt{E}) = \mathbf{1}$, $\lambda^1(\mathtt{E}) = \mathtt{E}$, y $\lambda^i(\mathtt{E}) = 0$ si i es más grande que la dimensión de E. Naturalmente se espera que en K-teoría equivariante se conserve esta propiedad, aunque algunos detalles deben ser verificados.

λ-anillos equivariantes. Para las construcciones que se presentarán en este trabajo, las cuales son todas equivariantes, es necesario verificar en primer lugar que todas propiedades de la λ-aplicación toman sentido en un contexto equivariante.

Sea $\mathtt{E}$ un G-haz vectorial sobre una variedad M, la potencia exterior $\Lambda^i(\mathtt{E})$ es un G-haz vectorial sobre M por cuanto las operaciones usadas para definir la potencia exterior son equivariantes. Luego la aplicación $\lambda^i : K(M) \to K(M)$ se puede extender al anillo $K_G(M)$. Mas precisamente podemos definir la aplicación

$$\lambda^i_G(\mathtt{E}) = [\Lambda^i(\mathtt{E})]$$

así como también podemos considerar la λ-aplicación:

$$(\lambda_t)_G(\mathtt{E}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\mathtt{E})t^i.$$

Por simplicidad estas aplicaciones se notarán sin el sub índice G, si esto no da lugar a confusión. Si F es otro G-haz vectorial sobre M, la suma $E \oplus F$ es un G-haz vectorial. Sin embargo es posible considerarlo como un haz vectorial ordinario sobre M y aplicarle λ_t en el anillo $K(M)$. Es posible entonces obtener

$$\lambda_t(\mathtt{E} \oplus \mathtt{F}) = \lambda_t(\mathtt{E})\lambda_t(\mathtt{F}).$$

De esta manera es suficiente verificar que el lado derecho de la ecuación anterior es una G-aplicación, si tanto E como F lo son. Pero usando nuevamente que los haces equivariantes son en particular haces de alguna clase en $K(M)$ se concluye que esta fórmula multiplicativa vale en K-teoría equivariante.

Sea $p : E \to M$ un G-haz vectorial sobre M. Si s es una sección equivariante de E es posible formar el complejo:

$$0 \xrightarrow{d} \mathbb{C} \xrightarrow{d} \Lambda^1(E) \xrightarrow{d} \Lambda^2(E) \xrightarrow{d} \dots$$

donde las aplicaciones d son definidas por $d(\xi) = \xi \wedge s(x)$ si $\xi \in \Lambda^i(E_x)$. Si se considera s como la sección natural dad por la aplicación diagonal $\delta : E \to E \times_M E = p^*(E)$ esta sección es naturalmente equivariante. Sea $p : E \to M$ un G-haz vectorial sobre M. Si se considera $\mathbf{F}$ algún otro complejo sobre M, entonces podemos tomar el pullback de cada haz en el complejo y definir $p^*(\mathbf{F})$ como un complejo sobre E. La asignación $\mathbf{F} \mapsto \Lambda^*(E) \otimes p^*(F)$ induce un homomorfismo aditivo

$$\varphi_* : K_G(M) \to K_G(E)$$

el cual es llamado el homomorfismo de Thom ([21] Capítulo 3). Si $\varphi : M \to E$ es la sección cero, entonces se tiene que:

$$\varphi^*\varphi_*(\xi) = \xi.\lambda_{-1}(\mathtt{E}) \tag{5.3}$$

para todo $\xi \in K_G(M)$. Se define así la clase de Thom equivariante $\varphi_*(1) = \lambda_E \in K_G(E)$.

Proposición 5.3.2 ([21] Prop. 3.3)**.** *El homomorfismo de Thom $\varphi_* : K_G(M) \to K_G(E)$ es un isomorfismo para todo G-haz vectorial sobre una G-variedad compacta M.*

Por simplicidad, en el resto de este escrito, si esto no da lugar a confusión, no se hará diferencia entre el haz vectorial E y su clase $\mathtt{E}$ en la K-teoría de M.

Ejemplo 10. Suponga que $p : E \to M$ es un G-haz vectorial tal que $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$, y cada L_i es un G-haz vectorial lineal sobre M. El cálculo de la aplicación λ_t en el haz E da como resultado:

$$\lambda_t(E) = \lambda_t(L_1 \oplus \cdots \oplus L_k) = \Pi_i \lambda_t(L_i) = \Pi_i(1 + L_i t).$$

Bibliografía

[1] Adem, A. ; Leida, J. ; Ruan, Y.: *Orbifolds and stringy topology.* Cambridge University Press

[2] Adem, A. ; Ruan, Y.: *Twisted orbifold k-theory.* Comm. Math. Phys. **237**, 3, 533-556. MR 2004e:19004, (2003)

[3] Adem, A. ; Ruan, Y. ; Zhang, B.: *A stringy product on twisted obifold K-theory.* Morfismos **11**, no. 2, 2007 (Décimo Aniversario)

[4] Atiyah, M. ; Hirzebruch, F.: *Vector bundles and homogeneous spaces.* Proc. Symp. Pur Math. **3**. 7-38., (1961)

[5] Becerra, E. ; Uribe, B.: *Stringy Oribifold product in K-theory for abelian global quotients.* Transaction of the AMS, (2009)

[6] Carey, Alan L. ; Wang, Bai-Ling: Thom isomorphism and push-forward map in twisted K-theory. En: *J. K-Theory* 1 (2008), Nr. 2, p. 357–393. – ISSN 1865–2433

[7] Chen, W. ; Ruan, Y.: *A new cohomology theory of orbifold.* Communications in Mathematical Physics vol. 248, 1, 1-31

[8] Dijkgraaf, R. ; Pasquier, V. ; Roche, P.: *Quasi-Hopf algebras, gorup cohomology and Orbifolds models.* Nuclear Physics B,**18B**,60-72

[9] Dixon, L. ; Harvey, J. ; Vafa, C. ; Witten, E.: *Strings on Orbifolds I.* Nucl. Phys. **B 261**, 678-686 (1985)

[10] Dixon, L. ; Harvey, J. ; Vafa, C. ; Witten, E.: *Strings on Orbifolds II.* Nucl. Phys. **B274**, 285-314 (1986)

[11] Drinfeld, V.: *Quantum groups.* Proc. Int. Congr. Math at Berkeley. Amer. Math. Soc. 798-820

[12] Duman, A.: *Phd. Doctoral dissertation.* University of British Columbia, 2010

[13] Feshbach, M.: *Transfer and compact Lie groups.* Bulletin of the AMS, vol **83**, N. 3, 1977

[14] Goff, C. ; Mason, G. ; Ng, S.: *On the Gauge Equivalence of Twisted Quantum Doubles of Elementary Abelian and Extra-Special 2-Groups*. Journal of Algebra, 312 (2007), no. 2, 849–875

[15] Hatcher, A.: *Vector bundles and K-theory.* Cambridge University Press, (2002)

[16] Kawasaki, T.: *The index of elliptic operators over V-manifolds.* Nagoya Math. J. **84** (1981), 135-157

[17] Naidu, D.: *Categorical Morita equivalence for group-theoretical categories.* Comm. Algebra 35 (2007), no. 11, 3544-3565

[18] Naidu, D. ; Nikshych, D.: *Lagrangian subcategories and braided tensor equivalences of twisted quantum doubles of finite groups.* Comm. Math. Phys. 279 (2008), 845-872

[19] Olivier, B.: *The representation ring of a compact Lie group revisited.* Comment. Math. Helv. **73**, 353-378

[20] Satake, I.: *On a generalization of the notion of manifold*. Proc. Nat. Acad. Sci. **42**, 359-363

[21] Segal, G.: *Equivariant K-theory.* Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., **34**. 113-128., (1968)

[22] Segal, G.: *The representation-ring of a compact Lie group.* Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., **34**. 129-151., (1968)

[23] Willerton, S.: *The twisted Drinfeld double of a finite group via gerbes and grupoids.* Alg. Geom. Topol. **3**, 1419-1457.

[24] Witherspoon, S.: *Products on Hochschild cohomology and Grothendieck rings of crossed products.* Academic Press. Advances in Mathematics **185**, 136-158

[25] Witherspoon, S.: *The representation ring of the twisted quantum double of a finite group,.* Canad. J. Math. 48 (1996), 1324-1338.